



FONDO PIZZOFALCONE



OURCIER,
LES SCIENCES,

Rue du Jardinier-Saint-André-des-Arcs.
A PARIS.

NAZIONALE

B. Prov.

VI

433

NAPOLI

VITT. EM. III

BIBLIOTECA

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XXXX



Palchetto

Num.° d'ordine

5 33

B 7uv

VI

433

61627b.

ANALYSIS

Per Quantitatum

SERIES, FLUXIONES,

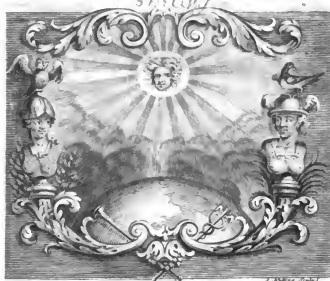
A C

DIFFERENTIALS:

CUM

Enumerationem Linearum

TERTII ORDINIS.



L O N D I N I :

Ex Officina PEARSONIANA, Anno M.DCC.XI.





Præfatio Editoris.



Tractatus aliquot Mathematicos Viri Illustrissimi D. Newtoni in lucem edimus, quorum primus & ultimus nunc primum prodeunt, reliqui vero vel à se vel ab aliis ante hac publici juris facti sunt.

Hæc autem Editio casui, sed tamen non sine ipsius consensu prius impetrato, ortum acceptum refert.

Etenim secundus jam agitur annus ex quo scrinia D. Collinſii (qui, uti notum est, amplissimum cum sui sæculi Mathematicis commercium habuit) meas in manus inciderunt; & in illis plurima reperi à cunctis fere totius Europæ eruditis ipsi communicata; & inter ea non pauca, quæ à Viro Cl D. Newtono scripta fuerunt; quæ cum tantæ molis essent, ut simul Tractatum breviusculum possent conficere, capî de iis
a edendis

P R Æ F A T I O.

edendis cogitare. Quum autem animadvertissem scripta ejus quæ jam in lucem prodierunt ferme idem cum hisce argumentum habere, haud operæ pretium me facturum, si typis mandarem, existimavi.

Unus tamen erat brevis de Curvarum Quadratura Tractatus adeo luculenter & concinne scriptus, atque ita accommodatus ad instituendos eos, qui nondum totam istam Methodum perspectam habeant, ut abstinere non potuerim, quominus Auctoris licentiam eundem edendi peterem. Quam Ille non solum summa cum humanitate concessit; sed & insuper veniam dedit reliqua ipsius colligendi, quæ ad idem argumentum spectabant.

*Hicce Tractatus, quem D. Collinsii manu exaratum comperi, inscriptus fuit De Analyfi per Æquationes Infinitas, & licet neque Auctoris nomen, neque tempus quo scriptus fuerat ullibi compa-
ruerit; multa tamen continere ad D. Newtoni Methodos spectantia statim agnovi, utpote Epistolarum autographo illi ad amussim respondentia, quod antea ipse D. Newtonus ad D. Oldenburgum miserat. Unde suspicabar totum ex eodem fonte emanasse; nihilominus suspenso eram animo, usque dum inventis, inter easdem chartas, Epistolis aliquot D. Barrovii ad D. Collinsium scriptis; tres reperi ad hunc Tractatum*

P R Æ F A T I O.

Etatum immediate spectantes; ex quibus facile intellexi quomodo D. Collinſius eum obtinuerat.

In una Epistolarum e Collegio S. S. Tr. data 20 Julii 1669, versus finem D. Barrovius hæc scribit.

* Amicus quidam apud nos commorans, qui eximio in his rebus pollet ingenio, nondiutertius chartas quasdam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimensiones supputandi Methodos, *Mercatoris* methodo similes, maxime vero Generales, descripsit, simulque *Æquationes* resolvendi, quæ, ut opinor, tibi placebunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

In hac Epistola narrat argumentum chartarum Amici sui fuisse Computationem dimensionum Magnitudinum, & Æquationum resolutionem, quod cum Tractatus hujus argumento quadrat.

Versus finem alterius Epistolæ ad D. Collinſium e Collegio S. S. Tr. data ult. Julii 1669, D. Barrovius ita scribit.

Mitto

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to these things, brought me the other Day, Some Papers, wherein he hath set down Methods of Calculating the Dimensions of Magnitudes, like that of *Mr. Mercator*, but very general, as all of Resolving Equations, which I suppose will please you, and I shall lend you them by the next.

P R Æ F A T I O.

† Mitto quas pollicitus eram Amici chartas, quæ uti spero haud parum te oblectabunt. Remittas, quæso, quum eas quantum tibi visum fuerit perlegeris ; id enim postulavit Amicus meus, cum primum eum rogavi, ut eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igitur, obsecro, te eas recepisse fac me certiolem, quod illis meo, quippe qui eas per Veredarium publicum ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gererem quam citissime.

Ex hac Epistola constat D. Barrovium dictum Librum misisse, ea lege, ut sibi remitteretur. Unde manifestum est, quare Tractatus, quem inveni, D. Collinsii manu scriptus fuit, autographo nempe ipsi Auctori restituto.

In tertia a D. Barrovia ad D. Collinsium Epistola data 20 Augusti 1669, constat D. Newtonum fuisse, Amicum illum, de quo D. Barrovius in duabus prioribus Epistolis mentionem fecerat, quod his verbis consignat.

Amici

† I send you the Papers of my Friend I promis'd, which I presume will give you much satisfaction ; I pray, having perus'd them so much as you think good, remand them to me, according to his desire. when I ask'd him the Liberty to impart them to you ; I pray give me notice of your receiving them, with your honest convenience, that I may be satisfied of their reception ; because I am afraid of them, venturing them by the Post, that I may not longer delay to correspond with your desire.

P R Æ F A T I O.

* Amici chartas tibi placuisse gaudeo ;
 ' est illi nomen *Newtonus*, Collegii nostri So-
 ' cius, & juvenis, (secundus enim, ex quo
 ' Artium Magistri gradum cepit, jam agitur
 ' annus,) et qui, eximio quo est acumine,
 ' permagnos in hac re progressus fecit. Illas,
 ' si vis, cum Nobili Domino Vicecomite
 ' *Brounkero* communica.

*Perspecto jam D. Newtonum hujus Tractatus
 Auctorem esse ; ab eo sciscitatus sum num penes se adhuc
 esset autographum, quod quidem ille exquirens inve-
 nit, & mihi tradidit, cum exemplari Collinsiano
 ad verbum usque conveniens.*

*Etiam si vero hic Tractatus ad D. Collinsium
 missus fuisset mense Julii 1669, quod aliquantulum
 erat posteaquam D. Mercator Logarithmotechniam
 suam in lucem ediderat ; manifestum est ex quibus-
 dam aliis Epistolis, (quæ itidem inter D. Collinsii
 chartas fuerunt,) quod antea scriptus esset, imo quod
 D. Newtonus invenisset Methodum investigandi
 Magnitudinum Dimensiones per Infinitas Series vel
 aliquot annos antequam D. Mercator Librum suum
 in vulgus edidit ; ut liquet ex Epistola a Collinsio*
b
ad

* I am glad my Friend's Paper gives you so much Satisfaction, his Name is Mr. *Newton*, a Fellow of our College, not very young, (being but the second Year Master of Arts,) but of an extraordinary Genius and Proficiency in such things, you may impart the Papers, if you please, to my Lord *Brouncker*.

P R Æ F A T I O.

ad D. Jacobum Gregorium data 25. Novemb. 1669, ubi hæc sunt verba.

* *Barrovius* Provinciam suam Publice prælegendi remisit cuidam nomine *Newtono Cantabrigiensi*, quem tanquam Virum acutissimi ingenii, in Præfatione Prælectionum Opticarum memorat, & qui, antequam edertur *Mercatoris* Logarithmotechnia, Methodum invenerat eandem, eamque ad omnes Curvas generaliter, & ad Circulum diversimode applicârat.

Quinetiam D. Collinsius in Epistola ad D. Strode, data 26. Julii 1672, sic scribit.

† *Mense Septembri 1668, Mercator Logarithmotechniam edidit suam, quæ specimen hujus Methodi (i. e. Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe, Quadratura Hyperbolæ continet. Haud multo postquam in publicum prodiret liber, exemplar unum Cl. Wallisio Oxoniam misi, qui suum de eo judicium in Actis Philosophicis statim fecit: alterum Barrovio Cantabrigiam, qui quasdam Newtoni chartas, qui jam Barrovium in Mathematicis Prælectionibus*

* Mr. Barrow hath resign'd his Lecture's Place to one Mr. Newton of Cambridge, whom he mentions in his Optice Preface as a very ingenious Person; one who hath, before Mr. Mercator's Logarithmotechnia was extant, invented the same Method, and applied it generally to all Curves, and divers ways to the Circle.

P R Æ F A T I O.

'onibus publicis excipit, extemplo remisit :
 'Ex quibus & aliis, quæ olim ab Auctore
 'cum *Barrovia* communicata fuerant, patet
 'illam Methodum a dicto *Newtono* aliquot
 'annis ante excogitatam, & modo generali
 'applicatam fuisse : ita ut ejus ope in quavis
 'Figura Curvilinea propofita, quæ una vel
 'pluribus Proprietatibus definitur, Quadra-
 'tura vel Area dictæ Figuræ, accurata fi
 'possibile fit, fin minus infinite propinqua ;
 'Evolutio vel Longitudo lineæ Curvæ ; Cen-
 'trum gravitatis Figuræ ; Solida ejus rota-
 'tione genita, & eorum Superficies ; sine
 'ulla Radicum Extractione obtineri queant.

*Ubi obiter notemus in hac Collinsii historiola,
 methodum argumentandi usurpatam a D. Newtono
 in Tractatu suo De Quadratura Curvarum,
 quasi digito monstrari, dum dicit hanc Methodum
 exhibere Quadraturam Figurarum accuratam, si
 modo fieri possit, fin minus in infinitum approximan-*
tem,

† In September 1659, Mr. Mercator publish'd his *Logarithmotechnia*, containing a Specimen of this Method, (that is, of Infinite Series) in one only Figure, to wit in the Quadrature of the Hyperbola. Not long after the Book came out, I sent one of them to Dr. Wall at Oxford, who forthwith gave his kind of it in the *Philos. Transactions* : another of them I sent to Dr. Barrow at Cambridge, who forthwith lent me up some Papers of Mr. Newton, who is since become the Doctor's Successor in the Mathematical Lectures there. By which, and former communications made thence from the Author to the Doctor, it appears that the said Method was invented some Years before by the said Mr. Newton, and generally applied : so that thereby in any Curvilinear Figure propos'd, that is determin'd by one or more common Properties, by the same Method may be obtain'd the Quadrature or Area of the said Figure, accurately when it can be done, but always infinitely near ; the Evolusion, or Length of the said Curve Line ; the Centre of Gravity of the Figure ; its round Solids made by Rotation, and their Surfaces ; and all perform'd without any Extraction of Roots.

P R Æ F A T I O.

tem, atque ista omnia fieri sine ulla Extractione Radicum ; Hæc enim ipsa est argumentatio in dicto Tractatu observata: & propterea hanc Methodum saltem Anno 1672 coactaneam extitisse non est dubitandum.

Inveni etiam in exemplari Epistola, a D. Collinsio ad D. Davidem Gregorium prædicti Jacobi fratrem, datæ 11. Aug. 1676, præter eadem fere quæ D. Strode scripserat, etiam verba sequentia:

** Supradicta Serierum Infinitarum doctrina, a Newtono biennium ante excogitata fuit, quam ederetur Mercatoris Logarithmotechnia, & generaliter omnibus Figuris applicata.*

Simulque affirmat se olim cum quibusdam Academicis Parisiensibus hæc eadem scripto communicasse.

Quapropter, cum D. Mercator Librum suum Anno 1668 in lucem ediderit, sequitur eandem Doctrinam Infinitarum Serierum Figuris omnibus generaliter applicatam fuisse Anno 1666.

Denique in Epistola, circa idem tempus ad D. Oldenburgum scripta, asserit Collinsius, Jacobum Gregorium non nisi conspecta aliqua e Seriebus

* The said Doctrine of Infinite Series was invented by Mr. Newton, about two Years before the Publication of Mr. Mercator's Logarithmotechnia, and generally applied to all Curves.

P R Æ F A T I O.

bus *Newtoni*, quam illi impertierat, in eandem *Serierum Methodum* incidisse.

Ex Newtoni Schedis quibusdam a me visis intellexi, quod is Quadraturam Circuli, Hyperbolæ, & aliarum quarundam Curvarum per Series Infinitas ex Wallisii nostri Arithmetica Infinitorum, per Interpolationem Serierum ejus, primo deduxit, idque Anno 1665; deinde Methodum excogitavit easdem Series per Divisiones & Extractions Radicum inveniendi, quam Anno sequente generalem reddidit.

Et cum scriptus fuerit hic Tractatus, quo tempore hæc recens inventa essent, ideo Cl. Auctor dignatus est multa in eo dilucidare, ad Resolutionem Æquationum per Infinitas Series spectantia, quæ in aliis Libris frustra quæras.

His subjunximus diversa Epistolarum Auctoris fragmenta, quæ ad easdem Doctrinas pertinent, quæq; olim inter Cl. Wallisii Opera in lucem prodire. Epistolas haud dedi integras, ut evitarem repetitionem non necessariam multarum rerum, quæ supra in Tractatu De Analyfi per Æquationes Infinitas traditæ sunt: Quinimo Exempla quædam in iis Epistolis prætermisi ipsius Cl. Auctoris monitu, Regulas suas per se satis claras esse credentis, neque ullam dilucidationem desiderare.

P R Æ F A T I O.

Inter D. Collinsii schedas reperi autographum Epistolæ datæ 8. Novemb. 1676, cujus fragmentum sub finem adjeci, & dignum luce putavi; quoniam in eo memoratur solutio Problematis admodum generalis in Comparatione Curvarum usûs, quæ perficitur in Cor. 2. Prop. 10. Tract. De Quadratura Curvarum; Unde Lector intelligat solutionem illam Auctori jam tum innotuisse.

Hiscæ Fragmentis annexus est ille ipse Tractatus De Quadratura Curvarum; una cum altero De Enumeratione Linearum Tertii Ordinis, quorum uterque primum typis mandatus est Anno 1704, ad finem Optices eximie ejusdem Cl. Auctoris.

Coronidis loco subjicitur Tractatulus, cui titulo est, Methodus Differentialis, quem Cl. Auctoris permissu ex ejus autographo descripsi; Complectitur autem Doctrinam describendi Curvas ex datis Differentiis differentiarum Ordinatarum. Hæc Methodus Differentialis innititur Problemati ducendi Curvam Parabolici generis per data quocunque puncta; de quo Cl. Auctor olim mentionem fecerat in Epistola sua ad D. Oldenburgum 1676 missa; & cujus solutionem dedit in Lem. 5. Lib. 3. Princip. Philos. non tamen prorsus eandem quoad Constructionem cum ea quam impræsentiarum tradimus.

Hujus

P R Æ F A T I O.

Hujus Geometriæ Newtonianæ non minimam esse laudem duco, quod dum per limites Rationum Primarum & Ultimarum argumentatur, æque demonstrationibus Apodicticis ac illa Veterum munitur; utpote quæ haud innititur duriusculæ illi Hypothefi quantitatum Infinite parvarum vel Indivisibilium, quarum Evanescentia obstat quominus eas tanquam quantitates speculemur. Neque parum præcellere videtur, quod tam paucis innixa Propositionibus tam late sese extendat hæc Mathesis, intra se omnia Problemata difficiliora vulgatas Methodos eludentia complectens; siquidem quicquid proponitur poterit Geometricè per alicujus Curvæ Aream effingi; vel per Methodum Universalem Extrahendi Radices ex Æquatione quavis erui; vel ad summum, ducendo Curvam per terminos quantitatum datarum solvi.

W. Jones.



INDEX OPUSCULORUM

Quæ in hoc Libro continentur.

	<i>Pag.</i>
D E Analyfi per Æquationes Infinitas.	I
<hr/>	
<i>Fragmenta</i>	
<i>Epistolarum.</i>	
<i>Ad D. Oldenburgum 13 Jun. 1676.</i>	<i>23</i>
<i>Ad D. Oldenburgum 24 Octob. 1676.</i>	<i>31</i>
<i>Ad D. Wallifium Anno 1692.</i>	<i>34</i>
<i>Ad D. Collinfium Nov. 8. 1676.</i>	<i>38</i>
<hr/>	
De Quadratura Curvarum.	41
Enumeratio Linearum Tertii Ordinis.	69
Methodus Differentialis.	93



DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum
INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.



ASI AB Curvæ alicujus AD, fit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c , &c. Quantitates datæ, & m, n , Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^n = y$; Erit $\frac{an}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}} = \text{Area ABD.}$

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (= 1x^2) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = \text{ABD.}$
2. Si

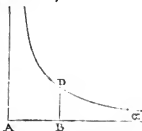


2. Si $4\sqrt{x} (= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} (= \frac{1}{4}\sqrt{x}) = ABD$.
 3. Si $\sqrt[3]{x^3} (= x^1) = y$; Erit $\frac{1}{3}x^1 (= \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^3}) = ABD$.
 4. Si $\frac{1}{x^2} (= x^{-2}) = y$, id est, si $a = 1 = n$, & $m = -2$;

Erit $(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) = -x^{-1} (= -\frac{1}{x}) = aBD$,
 infinite versus a protensa, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x}} (= x^{-\frac{1}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{2}{-2x}$
 = BD.

6. Si $\frac{1}{x} (= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}x^0 = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}$ = Infinita, qualis est Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.



Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipsius y ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a singulis Terminis emanant.

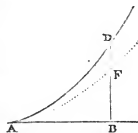
Exempla Prima.

Si $x^2 + x^{\frac{1}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$.

Etenim si semper sit $x^1 = BF$, et $x^{\frac{1}{2}} = FD$, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ superficiæ AFB descriptæ per Lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ AFD descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ toti ABD.

Sic si $x^3 - x^{\frac{1}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = ABD$.

Et si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 = ABD$.

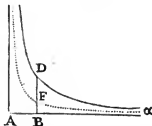


Ex-

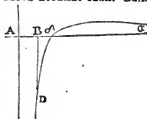
Exempla Secunda.

Si $x^{-2} + x^{-\frac{1}{2}} = y$; Erit $-x^{-2} - 2x^{-\frac{1}{2}} = aBD$. Vel si $x^{-2} - x^{-\frac{1}{2}} = y$; Erit $-x^{-2} + 2x^{-\frac{1}{2}} = aBD$.

Quarum signa si mutaveris habebis Affirmativum valorem ($x^{-2} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-2} - 2x^{-\frac{1}{2}}$) superficiei aBD , modo tota cadat supra basim ABa .



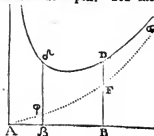
Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cum Curva decussat suam Basim inter B et a , ut hic vides in δ ,) ista parte a parte superiori subducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.



Exempla Tertia.

Si $x^2 + x^{-2} = y$; Erit $\frac{1}{2}x^3 - x^{-1} =$ Superficiei descriptæ. Sed hic notandum est, quod dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere Lineæ BD .

Nempe, posito $x^2 = BF$, & $x^{-2} = FD$; Erit $\frac{1}{2}x^3 = ABF$ Superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1} = DFa$ Superficiei descriptæ per DF .



Et

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.

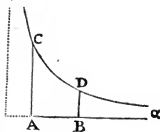
Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x} = y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x) aa + 0 \left(\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4} \right. \&c.$$

$$\begin{array}{r} aa + \frac{aax}{b} \\ 0 - \frac{aax}{b} + 0 \\ - \frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{b^2} \\ \hline 0 + \frac{aax^2}{b^2} + 0 \\ + \frac{aax^2}{b^2} + \frac{aax^3}{b^3} \\ \hline 0 - \frac{aax^3}{b^3} + 0 \\ - \frac{aax^3}{b^3} - \frac{aax^4}{b^4} \\ \hline 0 + \frac{aax^4}{b^4} \\ \&c. \end{array}$$



B

Et

Unde, pro Æquatione $\sqrt{ax+xx} = y$, nova producitur, viz.

$$y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \&c. \text{ Et (per Reg. 2.) Area quæfitæ}$$

ABDC erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} \&c. \text{ Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.}$

Eodem modo, si fit $\sqrt{a^2-xx} = y$, ejus Radix erit

$$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \&c.$$

Adeoquæ Area quæfitæ ABDC erit

$$\text{æqualis } ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} \&c.$$

Et hæc est Quadratura Circuli.

Vel si ponas $\sqrt{x-xx} = y$, erit Radix æqualis infinitæ seriei.

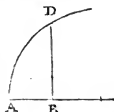
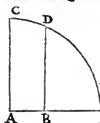
$$x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}} \&c.$$

Et Area quæfitæ ABD æqualis erit

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{72}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{1680}x^{\frac{11}{2}} \&c.$$

five $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{64}x^4 + \frac{5}{2048}x^5 \&c.$

Et hæc est Areæ Circuli Quadratura.



Si $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ 3) Extrahendo radicem utramq; prodit

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 + \frac{5}{128}b^4x^8} \&c.$$

Et Dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{8}b^2x^4 + \frac{1}{16}b^3x^6 + \frac{1}{128}b^4x^8 \&c. \\ &+ \frac{1}{2}a &+ \frac{1}{8}ab &+ \frac{1}{16}ab^2 &- \frac{1}{128}a^2b^3 \\ &- \frac{1}{8}a^2 &- \frac{1}{16}a^2b &- \frac{1}{128}a^3b^2 &+ \frac{1}{2048}a^4b^3 \\ &+ \frac{1}{128}a^3 &+ \frac{1}{2048}a^3b &- \frac{1}{131072}a^4b^2 \end{aligned}$$

Adeoquæ Aream quæfitam $x + \frac{1}{2}bx^3 + \frac{1}{8}b^2x^5 + \frac{1}{16}b^3x^7$ &c.

$$+ \frac{1}{2}a &+ \frac{1}{8}ab \\ &- \frac{1}{8}a^2$$

Sed

Sed observandum est, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bx^2}$ multiplices prodibit

$\frac{\sqrt{1+ax^2-bx^2}}{1+bx^2} = y$, & reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hisce, credo, satis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipsius y (quibuscunque Radicibus vel Denominatoribus sit perplexus, ut hic videre est,

$$= x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{ax^3+1}} - \frac{\sqrt{x^3+2x^2-x^1}}{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{2x-x^3}} = y) \text{ in series Infinitas}$$

simplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quaesita Superficies cognoscetur.

Exempla per Resolutionem Æquationum.

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda : Et fit z , numerus qui minus quam decima sui parte differt a Radice quaesita. Tum pono $2 + p = y$, & substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda est, ut quotienti addatur : Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, sive $p = 0,1$ prope veritatem est ; itaque scribo $0,1$ in quotiente, & suppono $0,1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius substituo, unde prodit $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$.

Et cum $11,23q + 0,061$ veritati prope accedit, sive fere fit q aqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ, quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis exclusive distant) scribo $-0,0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa sit.

Et

Et supponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo, & operationem sic produco quo usq; placuerit. Verum si ad bis tot figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q substituo $-0,0054 + r$ in hanc $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, scilicet primo ejus termino (q^2) propter exilitatem suam

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,10000000$ $- 0,00541853$ $+ 2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+ y^3$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$+ 2y$	$- 4 - 2p$
	$- 5$	$- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+ p^3$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$
	$+ 6p^2$	$+ 0,06 + 1,2 + 6,0$
	$+ 10p$	$+ 1, + 10,$
	$- 1$	$- 1,$
	Summa	$+ 0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+ 6,3q^2$	$+ 0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+ 11,23q$	$- 0,060642 + 11,23$
	$+ 0,061$	$+ 0,061$
	Summa	$+ 0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + s = r$		

neglecto, & prodit $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$ fere, sive (rejectione $6,3r^2$) $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo $2,09455147$ Quotientem quaesitam.

Æquationes plurium dimensionum nihilo fecius resolvuntur, & operam sub fine, ut hic factum fuit levabis, si primos ejus terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quod in hoc exemplo, si dubitarem an $0,1 = p$ veritati satis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxissem $6p^2 + 10p - 1 = 0$, & ejus radices primam figuram in Quotiente scripsissem; & secundam vel tertiam Quotientis figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimo resultante quadratum coefficientis penultimi termini, non sit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minues præfertim in Æquationibus plurimarum dimensionum, si figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc est extrahendo minorem radicem, ex tribus ultimis terminis Æquationis novissime resultantis) exquiras: Isto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio, certe mihi videtur præ reliquis simplex, & usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet, unde cum opus sit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini desint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio semper relinquitur, cujus Radix una cum acquisita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propositæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit institui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (sicut Analytici notum est) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo tresve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hic est, istud in Operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at sequentem modum maxime expeditum puto, præsertim ubi Numeri Coefficientes constant ex pluribus Figuris.

Sit $p + 3$ substituenda pro y in hanc $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0$. Et cum ista possit resolvi in hanc formam

$$y - 4 \times y + 5 \times y - 12 \times y + 17 = 0. \text{ Æquatio nova sic generabitur}$$

$$p - 1 \times p + 3 = p^2 + 2p - 3. \text{ et } p^2 + 2p + 2 \text{ in } p + 3 = p^3 + 5p^2 + 8p + 6. \text{ et } p^3 + 5p^2 + 8p - 6 \text{ in } p + 3 = p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 18. \\ \text{et } p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 18 = 0, \text{ quæ quærebatur.}$$

LITERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

His in numeris sic ostensis: Sit Æquatio literalis

$$y^4 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0, \text{ resolvenda.}$$

Primum inquiri valorem ipsius y cum x sit nulla, hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis $y^4 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio esse $+ a$. Itaque scribo $+ a$ in Quotiente, & supponens $+ a + p = y$, substituo pro y valorem ejus, & Terminos inde resultantes ($p^4 + 3ap^3 + 4a^2p$, &c.) margini appono; Ex quibus assumo $+ 4a^2p + a^2x$ terminos utique ubi p & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & eos nihilo fere æquales esse suppono, sive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et scribens

— $\frac{1}{4}x$

— $\frac{1}{4}x$ in Quotiente, substituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p ; Et terminos inde resultantis iterum in margine scribo, ut vides in annexo schemate, & inde affumo Quantitates $+4a^3q - \frac{1}{4}ax^3$, in quibus utiq; q & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, five $q = +\frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ Quotienti, substituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q ; & sic procedo quo usque placuerit.

$y^3 + a^3y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \&c.$		
$+ a + p = y$	$+ y^3$ $+ a^3y$ $+ axy$ $- 2a^3$ $- x^3$	$+ a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$ $+ a^3 + a^2p$ $+ a^2x + axp$ $- 2a^3$ $- x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+ p^3$ $+ 3ap^2$ $+ 4a^2p$ $+ axp$ $+ a^2x$ $- x^3$	$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2q - \frac{1}{4}xq^2 + q^3$ $+\frac{3}{4}ax^2 - \frac{1}{4}axq + 3aq^2$ $- a^2x + 4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2 + axq$ $+ a^2x$ $- x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q$	$+ 3aq^2$ $+ 4a^2q$ $-\frac{1}{4}axq$ $+ \frac{3}{4}x^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2$ $-\frac{6}{4}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{1}{4}x^2r + 3ar^2$ $+\frac{1}{4}ax^2 + 4a^2r$ $-\frac{1}{4}axr$ $-\frac{3x^4}{1024a} + \frac{1}{4}x^2r$ $-\frac{1}{4}ax^2$ $-\frac{6}{4}x^3$
$+ 4a^3 - \frac{1}{4}ax + \frac{1}{4}x^3) + \frac{131x^3}{512a^2} - \frac{15x^4}{4096a} (+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$		

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo termino (q^3) Æquationis novissime resultantis miscebo, & ista etiam parte ($-\frac{1}{4}xq^2$) secundi, ubi x est tot dimensionum quot in penultimo termino Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q, \&c.$) margini.

margini adscriptos ut vides, substituo $\frac{x^3}{64} + r$ pro q ; & ex ultimis duobus terminis $(\frac{15x^4}{4096} - \frac{1}{128}x^3 + \frac{1}{128}x^2r - \frac{1}{4}axr + 4x^2r)$ Equationis inde resultantis, facta divisione $4x^3 - \frac{1}{4}ax + \frac{1}{128}x^2$ + $\frac{15x^4}{4096}$ (elicio + $\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens ista $(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}, \&c.)$ per Regulam secundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}, \&c.$ pro Area quaesita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x fit minor.

Alius modus easdem Resolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x fit major; Exemplum esto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc resoluturus excerpō terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$ in quibus x & y vel seorsim, vel simul multiplicata, sunt & plurimarum, & æqualium ubique dimensionum; & ex iis quasi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio esse x , & in Quotiente scribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x substituta) Radicem extraho quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente scribo. Denique pono $x + p = y$, & sic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x - \frac{a}{4} + \frac{ax}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}, \&c.$ adeoque Aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4}$

+ $\boxed{\frac{da}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertia Regulæ secundæ.

Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modo x & a sibi invicem ibi substituantur, ut non opus esset aliud Resolutionis exemplum hic adjungere.

Area autem $(\frac{xx}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{da}{64x}} \&c.$ terminatur ad Curvam quæ

juxta Asymptoton aliquam in infinitum serpit; & Termini initiales $(x - \frac{1}{4}a)$ valoris extracti de y , in Asymptoton istam semper terminantur; unde portionem Asymptoti facile invenies. Idem semper notandum est cum Area designatur terminis plus plisque divis per x continue, præterquam quod vice Asymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis composita.

Sed

Sed hunc modum missum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad instar Ellipsoidum flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, supra ostenso (scilicet quo demensiones ipsius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) annotabo sequentia.

1. Si quando accidit quod valor ipsius y , cum x nullum esse fingitur, sit quantitas furda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua designare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, si radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuisset furda vel ignota, finxisssem quamlibet (b) pro ea ponendam; et resolutionem ut sequitur perfecisssem. Scribens b in Quotiente, suppono $b + p = y$, & istum pro y substituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. resultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo sunt æquales, propterea quod b supponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, et $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ substituendum pro p , &c.

$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$. Sit $cc = 3b^2 + a^2$.		
$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^4} + \frac{x^3}{c^3} + \frac{a^3bx^2}{c^5} - \frac{a^4bx^3}{c^7} + \frac{a^5bx^4}{c^9}$ &c.		
$b + p = y$	y^3 $+ axy$ $+ aay$ $- x^3$ $- 2a^3$	$+ b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$ $+ abx + axp$ $+ aab + aap$ $- x^3$ $- 2a^3$
$-\frac{abx}{cc} + q = p$	p^3 $+ 3bp^2$ $+ axp$ $+ ccp$ $- x^3$ $+ abx$	$- \frac{a^3bx^3}{c^6}$ &c. $+ \frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2} q$ &c. $- \frac{a^3bx^2}{c^3} + axq$ $- abx + ccq$ $- x^3$ $+ abx$
$c^3 + ax - \frac{6ab^2x}{cc} \left(\frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3bx^2}{c^6} \right) \left(\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^3} + \frac{a^3bx^2}{c^5} \right)$ &c.		

Completo opere, sumo numerum aliquem pro a , & hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, sicut de numerali æquatione ostensum supra resolvo; & radicem ejus pro b substituo.

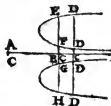
2. Si dictus valor sit nihil, hoc est si in æquatione resolvenda nullus sit terminus nisi qui per x vel y sit multiplicatus, ut in hac $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos ($-axy + x^3$) seligo in quibus x seorsim & y etiam seorsim si fieri potest, alias per x multiplicata, sit minimarum dimensionum. Et

illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$ pro y substituendum. In hac $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y - x^3$, vel ex $y^3 - a^2y$ elicere.

3. Si valor iste fit imaginarius, ut in hac $y^4 + y^3 - 2y + 6 - x^2y^2 - 2x + x^3 + x^4 = 0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.

Sic in annexo schemate, cum AC (x) nulla est, tum CD (y) est imaginaria.

Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x ; tum posito quod BC (x) sit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quilibet potest esse primus terminus quotientis, prout superficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC desideratur. In aliis etiam casibus, si quando hzitas, te hoc modo extricabis.

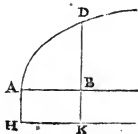


Deniq; si index potestatis ipsius x vel y sit fractio, reduco ipsum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^{\frac{1}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = 0$. Posito $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{2}} = z$, resultabit $v^2 - z^2v + z^2 = 0$, cujus radix est $v = z + z^3$, &c. sive (restituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}}$, &c.

Et hac de areis curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & superficie solidorum, deque Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quzratur quantitas Superficiel planz linea curva terminataz, non opus est quicquam de iis adjungere. In istis autem quo ego operor modo dicam brevissime.

Applicatio predictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.

Sit ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK describere; & quod BK (x) sit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quod ex momento BD perpetim dato, possis, per predictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum AK (x) momento 1 descripta conferre.

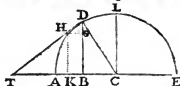


Jam

Jam qua ratione Superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem qualibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicitur. Exemplo res fiet clarior.

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducto tangente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & posito $AE = 1 = 2AC$. Erit ut BK five GH, momentum Basis AB(x), ad HD momentum Arcus AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK):



$\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ five $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ est momentum Arcus AD:

Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{128}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Quare, per regulam secundam, longitudo Arcus AD est

$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{128}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{128}x^{\frac{11}{2}}$ &c.

five $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{64}x^5 + \frac{1}{1280}x^7 + \frac{1}{1280}x^9$, &c.

Non secus ponendo CB esse x , & radium CA esse 1, invenies Arcum LD esse $x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{16}x^7$, &c.

Sed notandum est quod unitas ista quæ pro momento ponitur est Superficies cum de Solidis, & linea cum de superficiebus, & punctum cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in punctis, five lineis infinite parvis, si quidem proportionibus ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indivisibillum.

Ex his fiat conjectura de superficiebus & quantitativibus solidorum, ac de Centris Gravitatum.

Invenire prædictorum conversum.

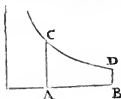
Verum si e contra ex area vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Basis AB desideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x .

Inven-

Inventio Basis ex Area data.

Ut si ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x} = y$) data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente defideratur.

Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^7 - \frac{1}{4}x^8$, &c. et radicem hujus tantum $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + x - z = 0$ extraho.



$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5$ &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{2}x^2$	$+\frac{1}{2}z^2$, &c.
	$-\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{3}z^3 - z^2p$, &c.
	$+\frac{1}{4}x^4$	$+\frac{1}{4}z^4 + z^3p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{5}x^5$	$-\frac{1}{5}z^5 - zp^3$
	$+x$	$+z + p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}x^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{3}p^3$	$-\frac{1}{3}z^4 - \frac{1}{3}z^3q$, &c.
	$-z^2p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{2}z^2$	$+\frac{1}{2}z^5$
	$-\frac{1}{3}z^3$	$-\frac{1}{3}z^4$
	$+\frac{1}{4}z^4$	$+\frac{1}{4}z^3$
	$-\frac{1}{5}z^5$	$-\frac{1}{5}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{5}z^5 (\frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^4 + \frac{1}{4}z^5$		

Analyfin ut vides exhibui propter adnotanda duo sequentia.

1. Quod inter substituendum, istos terminos semper omitto quos nulli deinceps usui fore praevideam Cujus rei regula esto, quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collateraliter resultantem non addo plures terminos dextrorsum quam istius primi termini index dimensionis ab

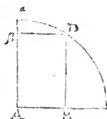
ab indice dimensionis maximæ unitatibus distat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimensio est 5, omisi omnes terminos post z^5 , post z^4 posui unicum, & duos tantum post z^3 . Cum radix extrahenda (x) sit parium ubique, vel imparium dimensionum, hæc esto regula; Quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collateraliter resultantem non addo plures terminos dextrorsum, quam illius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ binis unitatibus distat; vel ternis unitatibus, si indices dimensionum ipsius x unitatibus ubique ternis a se invicem distant, & sic de reliquis.

2. Cum video p , q , vel r , &c. in æquatione novissime resultante esse unius tantum dimensionis, ejus valorem, hoc est, reliquos terminos quotienti addendos, per divisionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ.

Si ex dato arcu aD Sinus AB desideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{12}x^7$, &c. supra inventæ, (posito nempe AB = x , $^aD = z$, & $A^a = 1$.) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{2}z^5 - \frac{1}{12}z^7 + \frac{1}{360}z^9$, &c.

Et præterea si Cosinum Ag ex isto arcu dato cupis, fac Ag ($= \sqrt{1-zz}$) = $1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{16}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.



De Serie progressionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x = z + \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{12}z^7 + \frac{1}{360}z^9$, &c. produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x = z - \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{2}z^5 - \frac{1}{12}z^7 + \frac{1}{360}z^9$, &c. per hos 2x3, 4x5, 6x7, 8x9, 10x11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{16}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c. per hos 1x2, 3x4, 5x6, 7x8, 9x10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{12}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{121}{253}$, $\frac{323}{445}$, $\frac{525}{627}$, $\frac{727}{829}$, &c. Et sic in reliquis.

E

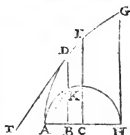
Ap-

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

Et hæc de curvis Geometricis dicta sufficiant. Mechanica fit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.

Exemplo fit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota qua describitur. Et quærat Superficies ABD. Jam posito $AB = x$, $BD = y$, ut supra, & $AH = 1$; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est $KD = \text{arctui AK}$. Quare tota $BD = BK + \text{arc. AK}$. Sed est BK

Quinetiam curva etiamfi



$(= \sqrt{x-xx}) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.
& (ex prædictis) arcus $AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD

$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{1152}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

Vel brevius sic: Cum recta AK tangenti TD parallela fit, erit AB ad BK ficut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x-xx} ::$

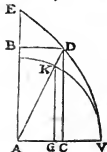
$1 : \frac{1}{2}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.)

$BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{128}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et superficies ABD

$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{1152}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{16384}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non dissimili modo (posito C centro circuli, & $CB = x$) obtinebis aream CBDF, &c.

Sic area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui apparetur) invenienda. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque $KG : AG :: AB (x) : BD (y)$, five $\frac{x \cdot AG}{KG} = y$. Verum ex natura Quadratricis est BA (= DC) = arcui VK, five $VK = x$. Quare posito $AV = 1$, erit $GK = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{16}x^5$, &c. ex supra ostensis, & $GA = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$, &c.



Adæque

Adeoque $y (= \frac{x \times AG}{KG}) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6}{1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{720}x^6}$ &c. five, divisione facta, $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c. et (per Reg. 2.) area AVDB = $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{15120}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliore, determinabilis est. Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad curvas Mechanicas (si quando id non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analyfis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analyfis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ, licet omnes earum terminos, nos homines & rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus: Sicut radices furdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur.

Denique ad Analyticam merito pertinere censeatur cujus beneficio curvarum area & longitudines &c. (id modo fiat) exacte & Geometrice determinantur. Sed ista narrandi non est locus, respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

1. Demonstratio quadraturæ curvarum simplicium in Regula prima.

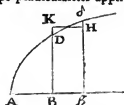
Preparatio pro Regula prima demonstranda.

Sit itaque curvæ alicujus AD β Basis AB = x , perpendiculariter applicata BD = y , & area ABD = z , ut prius. Item sit B β = o , BK = v , & rectangulum B β HK (ov) æquale spatio B β D.

Est ergo A β = $x + o$, & A β B = $z + ov$. His præmissis, ex relatione inter x & z ad arbitrium assumpta quæro y isto, quem sequentem vides, modo.

Pro lubitu sumatur $\frac{1}{2}x^2 = z$, five $\frac{1}{2}x^2 = zz$. Tum $x + o$ (A β) pro x , & $z + ov$ (A β B) pro z substitutis, prodibit $\frac{1}{2}$ in $x^2 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura curvæ) $z^2 + 2zov + o^3v$.

Et



Et sublatis ($\frac{1}{2}x^3$ & zx) æqualibus, reliquisque per 0 divisis, restat $\frac{1}{2}$ in $3x^2 + 3x0 + 0^2 = 2zv + 0v^2$. Si jam supponamus 0θ in infinitum diminui & evanescere, five 0 esse nihil, erunt v & y æquales, & termini per 0 multiplicati evanescent, quare restabit $\frac{1}{2} \times 3xx = 2zv$, five $\frac{1}{2}xx (=zy) = \frac{1}{2}x^2y$, five $x^{\frac{1}{2}} (= \frac{x^1}{x^{\frac{1}{2}}}) = y$. Quare e contra si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = z$.

Demonstratio.

Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; five, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m+n=p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, five $c^nx^p = z^n$: tum $x+0$ pro x , & $z+0v$ (five, quod perinde est, $z+0y$) pro z , substitutis, prodit c^n in $x^p + px^{p-1}$, &c. $= z^n + nxyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evanescerent, omisiss. Jam sublatis c^nx^p & z^n æqualibus, reliquisque per 0 divisis, restat $c^np x^{p-1} = nyz^{n-1}$ ($= \frac{nyx^n}{z} = \frac{nyx^{n-1}p}{cx^{\frac{p}{n}}}$ five, dividendo per c^nx^p , erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ five $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c , & $m+n$ pro p , hoc est, m pro $p-n$, & na pro pc , fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio curvarum quæ possunt quadrari.

Hinc in transitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & basin x ut inde quaratur applicata y . Ut si supponas $\sqrt{ax+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{ax+xx}} = y$. Et sic de reliquis.

2. Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.

Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quod Quotiens, cum x sit satis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q , vel r , &c.) quo distat ab exacto valore

valore ipsius y , tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum p , q , r , &c. sunt radices, quantitas illa in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iste ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^3 + x^5 + x^7$, &c. et x^2 dimidium omnium $x^3 + x^5 + x^7 + x^9$, &c. Itaque si $x = \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + x^3 + x^5$, &c. et x^2 plusquam dimidium omnium $x^3 + x^5 + x^7$, &c. Sic si $\frac{x}{b} = \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + \frac{x^3}{b}$



+ $\frac{x^1}{b^3}$, &c. Et sic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.

2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evanescat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino simul evanescat.

3. Quare quantitatibus p , q , r , &c. unus valor continuo decrescit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evanescat.

4. Sed valores istarum p , q , vel r , &c. una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propositæ (Sic in resolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^2 - x^3 = 0$, supra ostensa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{2}x + q = a - \frac{1}{2}x + \frac{xx}{64a^2} + r$, &c.) Unde satis liquet propositum quod quotiens infinite producta est una ex valoribus de y .

Idem patebit substituendo quotientem pro y in æquationem propositam. Videbis enim terminos illos sese perpetuo destruere in quibus x est minimarum dimensionum.





CUM in Epistolis D. Newtoni, vel in lucem jamdudum editis, vel quæ in manus nostras inciderunt, reperiantur aliqua quæ ad banc Doctrinam pertinent, ea excerpere & huic Tractatui adjungere visum est.



EXCERPTA

Ex Epistolis D. NEWTONI

Ad Methodum

FLUXIONUM,

E T

SERIERUM INFINITARUM

Speſtantibus.

*Fragmentum *Epistolæ ad D. Oldenburgium 13 Junii 1676 missæ.*



Ractiones in Infinitas Series reducuntur per divisionem ; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus ac institui solent in decimalibus numeris. Hæc sunt fundamenta harum reductionum ; sed extractiones radicum, multum abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$P + PQ^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-m}{2n} BQ + \frac{m-m}{3n} CQ + \frac{m-m}{4n} DQ + \&c.$$

Ubi $P + PQ$ significat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimensio quævis, vel radix dimensionis, investiganda est. P , primum terminum quantitatis ejus ; Q , reliquos terminos divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimensionis ipsius $P + PQ$; Sive dimensio illa integra fit ; five (ut ita loquar) fracta ; five affirmativa, five negativa. Nam, sicut Analystæ, pro aa , aaa , &c. scribere solent a^2 , a^3 , &c. sic ego, pro \sqrt{a} , $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, &c. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, scribo a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} .

Et

* Extat Epistola in Tom. 3. Operum Wallisii.

Et sic pro $\frac{a^2}{\sqrt{c: a^2 + b^2 x}}$ scribo $aa \times \sqrt{a^2 + b^2 x}^{-\frac{1}{2}}$; & pro $\frac{a^2 b}{\sqrt{c: a^2 + b^2 x: a^2 + b^2 x}}$ scribo $a^2 b \times a^2 + b^2 x^{-\frac{1}{2}}$: In quo ultimo casu, si $a^2 + b^2 x^{-\frac{1}{2}}$ concipiatur esse $P + PQ^{\frac{1}{2}}$ in Regula; erit $P = a^2$, $Q = \frac{b^2 x}{a^2}$, $m = -2$, & $n = 3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo A, B, C, D, &c. nempe A pro primo termino $P^{\frac{1}{2}}$, B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$, & sic deinceps. Ceterum usus Regulæ patebit exemplis.

Exempl. 1. Est $\sqrt{c^2 + x^2}$ (seu $c^2 + x^2$) $^{\frac{1}{2}}$ = $c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9}$ &c. Nam, in hoc casu, est $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$, A ($= P^{\frac{1}{2}} = c$), B ($= \frac{m}{n}AQ = \frac{x^2}{2c}$), C ($= \frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{x^4}{8c^3}$), & sic deinceps.

Exempl. 2. Est $\sqrt{c^2 + c^2 x - x^2}$ (i. e. $c^2 + c^2 x - x^2$) $^{\frac{1}{2}}$ = $c + \frac{c^2 x - x^2}{5c^4} - \frac{2c^2 x^2 + 4c^2 x^3 - 2x^4}{25c^5} + \text{&c.}$ Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^2 pro P, & $\frac{c^2 x - x^2}{c^2}$ pro Q. Potest etiam $-x^2$ substitui pro P, & $\frac{c^2 x + c^2}{-x^2}$ pro Q, et tunc evadet $\sqrt{c^2 + c^2 x - x^2} = -x + \frac{c^2 x + c^2}{5x^4} + \frac{2c^2 x^2 + 4c^2 x^3 + c^4}{25x^5} + \text{&c.}$ Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit; posterior, si valde magnum.

Exempl. 3. Est $\frac{N}{\sqrt{y^2 + y^2 - a^2 y}}$ (hoc est, $N \times y^2 - a^2 y$) $^{-\frac{1}{2}}$ æqualis $N \times \frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{2a^4}{5y^5} + \frac{14a^6}{81y^7} + \text{&c.}$ Nam $P = y^2$, $Q = \frac{-a^2}{y}$, $m = -1$, $n = 3$. A ($= P^{\frac{1}{2}} = y$), hoc est $\frac{1}{y}$. B ($= \frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-a^2}{y} = \frac{a^2}{3y^3}$), &c.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d + e$, (hoc est, $\sqrt{d + e}$) $^{\frac{1}{3}}$ est $d^{\frac{1}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2e^2}{5d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} + \text{&c.}$

Nam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 4$, $n = 3$, A ($= P^{\frac{1}{3}} = d^{\frac{1}{3}}$), &c.

Exempl. 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadrato-cubus ipsius $d + e$, (hoc est, $\sqrt{d + e}$) $^{\frac{2}{3}}$ desideretur: erit, juxta Regulam, $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 5$, & $n = 1$; adeoque A ($= P^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$), B ($= \frac{m}{n}AQ = 5d^{\frac{1}{3}}e$), & sic C = $10d^{\frac{2}{3}}e^2$, D = $10d^{\frac{1}{3}}e^3$, E = $5de^4$, F = e^5 , & G ($= \frac{m-5n}{6n}FQ$) = 0. Hoc est, $\sqrt{d + e}^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}} + 5d^{\frac{1}{3}}e + 10d^{\frac{2}{3}}e^2 + 10d^{\frac{1}{3}}e^3 + 5de^4 + e^5$.

Exem.

Exempl. 6. Quinetiam Divisio, five simplex fit, five repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{d+e}$ (hoc est $\overline{d+e}^{-1}$ five $\overline{d+e}^{-\frac{1}{1}}$) in seriem simplicium terminorum resolvendum fit: Erit juxta Regulam $P = d$, $Q = e$, $m = -1$, $n = 1$, & $A (= P^{\frac{1}{1}} = d^{\frac{1}{1}}) = d^{-1}$ seu $\frac{1}{d}$, $B (= \frac{n}{P}AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d} = -\frac{e}{d^2})$, & sic $C = \frac{e^2}{d^3}$, $D = -\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc est $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} + \&c.$

Exempl. 7. Sic et $\overline{d+e}^{-3}$ (hoc est unitas ter divisa per $d+e$, vel semel per cubum ejus,) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} + \&c.$

Exempl. 8. Et $N \times \overline{d+e}^{-\frac{1}{3}}$, (hoc est N divisum per radicem cubicam ipsius $d+e$,) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{5}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{2}{3}}} + \&c.$

Exempl. 9. Et $N \times \overline{d+e}^{-\frac{1}{2}}$ (hoc est N divisum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipsius $d+e$, five $\sqrt[3]{d^3 + 3d^2e + 3de^2 + e^3}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}} - \frac{3e}{2d^{\frac{3}{2}}} + \frac{12e^2}{25d^{\frac{5}{2}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{7}{2}}} + \&c.$

Per eandem Regulam Genes Potestatum, Divisiones per Potestates aut per quantitates radicales, & Extractions radicum altiorum in numeris etiam commode instituuntur.

Extractiones Radicum affectarum in speciebus imitantur earum extractions in numeris, sed methodus *Vietæ* & *Oughtredi* nostri huic negotio minus idonea est: Quapropter aliam excogitare adactus sum. [*Hujus specimen exhibetur in Tractatu precedente Pag. 8.*]

Quomodo ex æquationibus, sic ad infinitas series reductis, Areæ & Longitudines curvarum, Contenta & Superficies solidorum, vel quorumlibet segmentorum figurarum quarumvis, eorumque Centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejusmodi æquationes infinitarum serierum reduci possint, indeque Problemata circa illas resolveri perinde ac si Geometricæ essent; nimis longum foret describere, sufficit specimina quædam talium Problematum recensuisse: Inque iis, brevitate gratia, literas A, B, C, D, &c. pro terminis seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

1. Si ex dato sinu recto, vel sinu verso, Arcus desideretur: Sit radius r , & sinus rectus x : Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6r^3} + \frac{3x^5}{40r^5} + \frac{5x^7}{112r^7} + \&c.$ hoc est, $= x + \frac{1 \times 1 \times x^3}{2 \times 3 \times r^3} A + \frac{3 \times 3 \times x^5}{4 \times 5 \times r^5} B + \frac{5 \times 5 \times x^7}{6 \times 7 \times r^7} C + \frac{7 \times 7 \times x^9}{8 \times 9 \times r^9} D + \&c.$

G

Vel

Vel, fit d diameter, ac x finus versus ; & erit Arcus x qualis

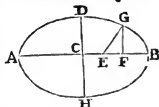
$$d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \&c. \text{ hoc est, } = \sqrt{dx} \text{ in}$$

$$1 + \frac{x}{6d} + \frac{3x^3}{40d^3} + \frac{5x^5}{112d^5} + \&c.$$

2. Si vicissim, ex dato Arcu defideretur finus : Sit radius r , & arcus z : Eritque finus rectus $= z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} - \&c. \text{ hoc est,}$
 $= z - \frac{zz}{2 \times 3rr} A - \frac{zz}{4 \times 5rr} B - \frac{zz}{6 \times 7rr} C - \&c. \text{ Et finus versus } = \frac{z^3}{2r^2} - \frac{z^5}{24r^4}$
 $+ \frac{z^7}{720r^6} - \frac{z^9}{40320r^8} + \&c. \text{ hoc est, } = \frac{zz}{1 \times 2r} A - \frac{zz}{3 \times 4rr} B - \frac{zz}{5 \times 6rr} C - \frac{zz}{7 \times 8rr} D - \&c.$

3. Si Arcus capiendus fit in ratione data ad alium Arcum : Efto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæfirus ad arcum illum datum ut n ad 1 ; Eritque arcus quæfiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2 \times 3dd} xx A + \frac{9-nn}{4 \times 5dd} xx B$
 $+ \frac{25-nn}{6 \times 7dd} xx C + \frac{35-nn}{8 \times 9dd} xx D + \frac{49-nn}{10 \times 11dd} xx E + \&c. \text{ Ubi nota, quod cum } n$
 $\text{est numerus impar, series definit esse infinita, \& evadet eadem quæ pro-$
 $\text{dit per Vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per istum}$
 $\text{numerum } n.$

4. Si in Axe alterutro AB, Ellipseos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG occurrens Ellipsi in G, motu angulari feretur ; & ex data area sectoris Elliptici BEG, quærat recta GF, quæ a puncto G ad axem AB normaliter demittitur : Efto BC = q , DC = r , EB = t , ac duplum areæ BEG = z ;



et erit $GF = \frac{1}{t}z - \frac{9}{6r^2t^4}z^3 + \frac{109t^2 - 69t^2}{120r^4t^7}z^5 - \frac{289t^4 + 5049t^2 - 225t^0}{5040r^6t^{10}}z^7 + \&c.$
 Sic itaque Astronomicum illud *Kepleri* Problema resolvi potest.

5. In eadem Ellipsi, si statuatur CD = r , $\frac{CB^2}{CD} = c$, & CF = x : Erit arcus Ellipticus DG = $x + \frac{1}{6c}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14r^3c^5}x^7 + \frac{1}{18r^5c^7}x^9 + \frac{1}{22r^7c^9}x^{11} + \&c.$

$$- \frac{1}{4cc^4} - \frac{1}{28rc^6} - \frac{1}{24r^3c^8} - \frac{1}{22r^5c^{10}} \\ + \frac{1}{112c^6} + \frac{1}{48rc^8} + \frac{1}{88r^3c^{10}} \\ - \frac{5}{1152c^8} - \frac{5}{352rc^{10}} \\ + \frac{7}{2816c^{12}}$$

Hic numerales Coefficientes supremorum terminorum ($\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \&c.$) sunt in Musica progressionem : Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem supremi termini per terminos hujus progressionis

$$\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$$

$\frac{1}{2}n-1$, $\frac{1}{4}n-3$, $\frac{1}{6}n-5$, $\frac{1}{8}n-7$, $\frac{1}{10}n-9$, &c. Ubi n significat numerum dimensionum ipsius c in denominatore istius supremi termini. E. g. ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^4}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n=6$, ducoque $\frac{1}{11}$ (numeralem coefficientem ipsius $\frac{1}{22r^4c^4}$) in $\frac{1}{2}$, hoc est, in 1; & prodit $\frac{1}{11}$, numeralis coefficientis termini proxime inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{11}$ in $\frac{1}{4}$, five in $\frac{n-3}{4}$, hoc est, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{1}{11}$ numeralis coefficientis tertii termini in ista columna. Atque ista $\frac{1}{11} \times \frac{1}{6}$ facit $\frac{1}{77}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{1}{77} \times \frac{1}{8}$ facit $\frac{1}{616}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum usque columnis præstari potest: Adeoque valor ipsius DG per hanc Regulam pro lubitu produci.

Adhæc, si BF dicatur x , sitque r latus rectum Ellipseos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus

$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } 1 + \frac{2}{3r} \left\{ x - \frac{2}{3e} \right\} x^2 + \frac{4}{5r^2} \left\{ x^2 - \frac{9e}{5r^2} \right\} x^3 + \frac{10}{7r^3} \left\{ x^3 - \frac{30e}{7r^3} \right\} x^4 + \&c.$$

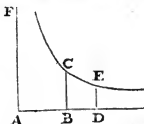
Quare, si ambitus totius Ellipseos desideretur; Biseca CB in F, & quare Arcum DG, per prius Theorema, & Arcum BG per posterius.

6. Si, vice versâ, ex dato arcu Elliptico DG, quæatur Sinus ejus CF; tum dicto CD = r , $\frac{CB^2}{CD} = e$, & arcu illo DG = z ; Erit

$$CF = z - \frac{1}{6e^3} z^3 - \frac{1}{108e^5} z^5 - \frac{1}{144e^7} z^7 - \&c.$$

Quæ autem de Ellipfi dicta sunt, omnia facile accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum signis ipsorum c & e ubi sunt imparium dimensionum.

7. Præterea, si sit CE Hyperbola, cujus Asymptoti AD, AF rectum angulum FAD constituent; & ad AD erigantur utcumque perpendiculara BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C & E: & AB dicatur a , BC b , & area BCED z ;



Erit

Erit $BD = \frac{x}{b} + \frac{x^3}{2ab^3} + \frac{x^5}{6a^3b^5} + \frac{x^7}{24a^5b^7} + \frac{x^9}{120a^7b^9} + \&c.$ Ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmetice progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in se continuo. Et hinc ex Logarithmo dato potest numerus ei competens invenire.

8. Esto VDE *Quadratrix*, cujus vertex est V, existente A centro & AE semi-diametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: Demissoque ad AE perpendiculo quovis DB, & acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T: Dic AV = a, & AB = x; Eritque $DB = a - \frac{x^3}{3a} - \frac{x^5}{45a^3} - \frac{x^7}{945a^5} - \&c.$

Et $VT = \frac{x^3}{3a} + \frac{x^5}{15a^3} + \frac{x^7}{159a^5} + \&c.$ Et Area

AVDB = $ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{x^7}{6615a^5} - \&c.$ Et Arcus

VD = $x + \frac{2x^3}{27a^3} + \frac{16x^5}{3025a^5} + \frac{604x^7}{893025a^7} + \&c.$

Unde vicissim, ex dato BD, vel VT, aut area AVDB, arcuve VD, per resolutionem affectarum æquationum erui potest x seu AB.

9. Esto denique AEB *Sphæroides*, revolutione Ellipseos AEB circa axem AB genita, & secta planis quatuor, AB per axem transeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem, & FG parallelo CE: sitque recta CB = a, CE = c, CF = x, & FG = y. Et Sphæroides segmentum CDGF dictis quatuor planis comprehensum, erit + $2cx y - \frac{x^3}{3c} y^3 - \frac{x^5}{20c^3} y^5 - \frac{x^7}{56c^5} y^7 - \frac{5x^9}{576c^7} y^9 - \&c.$

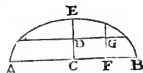
$$- \frac{cx^3}{3a^3} - \frac{x^5}{192ca^3} - \frac{x^7}{40c^3a^3} - \frac{5x^9}{336c^5a^3} - \&c.$$

$$- \frac{cx^5}{2c^3a^5} - \frac{x^7}{40c^5a^5} - \frac{x^9}{160c^7a^5} - \&c.$$

$$- \frac{cx^7}{56c^5a^7} - \frac{5x^9}{336c^7a^7} - \&c.$$

$$- \frac{5cx^9}{576c^7a^9} - \&c.$$

$$- \&c.$$



Ubi numerales coefficientes supremorum terminorum ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, \&c.$) in infinitum producuntur multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progressionis

$\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{1 \times 3}{4 \times 5}, \frac{3 \times 5}{6 \times 7}, \frac{5 \times 7}{8 \times 9}, \frac{7 \times 9}{10 \times 11}, \&c.$ Et numerales coefficientes terminorum

in unaquaque columna descendunt in infinitum producuntur multiplicando continuo coefficientem supremi termini in prima columna per eandem progressionem, in secunda autem per terminos hujus

$\frac{2 \times 1}{2 \times 3}, \frac{2 \times 3}{4 \times 5}, \frac{5 \times 5}{6 \times 7}, \frac{7 \times 7}{8 \times 9}, \&c.$ in tertia per terminos hujus $\frac{3 \times 1}{2 \times 3}, \frac{5 \times 3}{4 \times 5}, \frac{7 \times 5}{6 \times 7}, \frac{9 \times 7}{8 \times 9}, \&c.$

in quarta per terminos hujus $\frac{5 \times 1}{2 \times 3}, \frac{7 \times 3}{4 \times 5}, \frac{9 \times 5}{6 \times 7}, \&c.$ in quinta per terminos

hujus $\frac{7 \times 1}{2 \times 3}, \frac{9 \times 3}{4 \times 5}, \frac{11 \times 5}{6 \times 7}, \&c.$ Et sic in infinitum.

Et

Et eodem modo segmenta aliorum solidorum designari, & valores eorum aliquando commode per series quasdam numerales in infinitum produci possunt.

Ex his videre est, quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas æquationes ampliuntur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pæne dixerim problemata (si numeralia *Diophanti* & similia excipias) sese extendit.

Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ultiores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim quædam Problemata in quibus non liceat ad series infinitas per divisionem vel extractionem Radicum simplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere quæ circa reductionem infinitarum serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo, quod hæc speculationes diu mihi fastidio esse cœperint, adeo ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim.

Unum tamen addam: quod postquam Problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, possint inde variæ approximationes in usum Mechanicæ, nullo fere negotio formari; quæ, per alias methodos quæstæ, multo labore temporisque dispendio constare solent.

Cujus rei exemplo esse possunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura circuli. Nam, ut ex data arcus chorda A, & dimidii arcus chorda B, arcum illum proxime assequaris; finge arcum illum esse z , & circuli radium r ; juxtaque superiora erit A (nempe duplum sinus dimidii z)
 $= z - \frac{z^3}{4 \times 6r^2} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} - \&c.$ Et B $= \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6r^2} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} - \&c.$
 Duc jam B in numerum fictitium n , & a producto aufer A, & residui secundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6r^2} + \frac{z^5}{4 \times 6r^2}$) eo ut evanescat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$, et erit $8B - A = 3z^5 - \frac{3z^7}{64 \times 120r^4} + \&c.$
 hoc est $\frac{8B-A}{3} = z$; errore tantum existente $\frac{z^7}{7680r^4} - \&c.$ in excessu. Quod est Theorema *Hugenianum*.

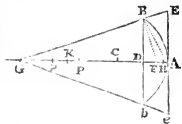
Insuper, si in Arcus Bb, sagitta AD indefinite producta, quærat punctum G, a quo actæ rectæ GB, Gb abscondant Tangentem Ee quam proxime æqualem Arcui isti: Est circuli centrum C, diameter AK $= d$, & sagitta AD $= x$: Et erit DB $(= \sqrt{d^2 - x^2})$

$$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

$$\text{Et AE (= AB)} = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{4 \times 2d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

H

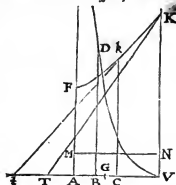
Et



Fragmentum Epistolæ D. Newtoni, ad D. Oldenburgium 24 Octob. 1676 missæ.



Ongitudo *Cissoïdis* sic construitur. Sit VD *Cissois*, AV Diameter Circuli ad quem aptatur, V vertex, AF Asymptota ejus, ac DB perpendicularare quodvis ad AV demissum. Cum semi-axe AF = AV, & semi-parametro AG = $\frac{1}{2}$ AV, describatur Hyperbola FAK; & inter AB & AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendiculara Ck, VK Hyperbolæ occurrentia in k & K; Et agantur rectæ KT, kt tangentés Hyperbolam in eisdem K & k, et occurrentes AV in T & t; Et ad AV constituatur rectangulum AVNM æquale spatio TKkt. Et *Cissoïdis* VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est.



[Quæ sequuntur scripta sunt in explicationem Epistolæ præcedentis.]

Quod vero attinet ad Inventionem terminorum $p, q, r,$ (vide pag. 25 & 8 :) in extractione Radicis affectæ, primum p sic eruo.

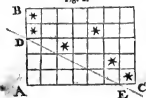
Descripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo distribuentes angulare spatium in æqualia parallelograma vel quadrata, quæ concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum Specierum, puta x & y , regulariter ascendendum a termino A, prout vides in Fig. 1. inscriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam, et x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus series conficienda

Fig. 1.

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
o	y	y^2	y^3	y^4

enda est. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: Et Regula ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicata; quorum unum sit humillimum in columna sinistra juxta AB, & alia ad Regulam dextrorsum sita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant; Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, & inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Fig. 2.



Sic ad extrahendam Radicem y , ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^2}{2}y^4 - 7a^2x^2y^3 + 6a^3x^3 + b^4x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua $*$; ut vides in Fig. 2. Dein applico Regulam DE ad inferiorem & locis signatis in sinistra columna; eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis

signatis locis coeperit attingere. Videoque loca sic attracta esse x^3 , x^2y , & y^6 . E terminis itaque, $y^6 - 7a^2x^2y^3 + 6a^3x^6$ tanquam nihil æqualibus (& insuper si placet reductis ad $v^6 - 7v^3 + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$.) quæro valorem y , & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.

Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2x^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$ proxime: Cum itaque a sit primus terminus valoris y , pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & substituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, lector se proprio Marte extricabit.) Subsequentes vero termini q, r, s , &c. eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæterisque eruuntur, quo primus p e prima, sed cura leviori; quia cæteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per Coefficientem radicis p, q, r , aut s .

Intellexi credo ex superioribus, regressionem ab Arcis curvarum ad Lineas rectas, fieri per hanc extractionem Radicis affectæ. Sed duo alii sunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est Computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, & intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, &c. Et partibus ejus multiplicatis in se, emergit $z^2 = x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5$, &c. $z^3 = x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5$, &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$, &c. $z^5 = x^5$, &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^5$, &c. Huic addo $\frac{1}{2}z^3$, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}z^3 = x + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{2}z^4$, & restat $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4 = x - \frac{1}{2}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{2}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{2}z^5 = x$ quamproxime; sive $x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{2}z^5$, &c.

Eodem

Eodem modo, Series de una indefinita quantitate, in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r radio circuli, x sinu recto arcus z , & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^3} + \&c.$ longitudine arcus istius; atque hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^3} + \&c.$ Vocetur hæc quantitas, t . Colligo potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr} \&c.$ $t^5 = x^5 + \&c.$ Aufero autem t de z , & restat $z - t = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5 - \&c.$ Addo $\frac{1}{4}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{4}t^3 = \frac{1}{4}x^3 + \&c.$ Aufero $\frac{1}{4}t^5$, & restat $z - t + \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{4}t^5 = 0$ quamproxime. Quare est $z = t - \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^5 - \&c.$ Sed si quis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem Arcus per Tangentem; eam non hoc circuitu, sed directâ methodo quævissem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes, & Radices affectarum Equationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius methodum in altera Epistola descriptam tanquam generaliorem, & (Regulis pro Elifione superfluum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regressione vero ab Arcis ad Lineas rectas, & similibus, possunt hujusmodi Theoremata adhiberi.

THEOREMA I. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9$, &c.

$$\begin{aligned} \text{Et vicissim erit } y = & \frac{z}{a} \\ & - \frac{b}{a^3} z^3 \\ & + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^5 \\ & + \frac{5abc - 4b^2c - a^2d}{a^7} z^7 \\ & + \frac{3a^2c^2 - 21ab^2c + 4a^2bd + 14b^4 - a^3e}{a^9} z^9 + \&c. \end{aligned}$$

Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ, $z = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{4}y^5 - \frac{1}{6}y^7 + \frac{1}{8}y^9 \&c.$ Et substitutis in Regula 1 pro a , $-\frac{1}{2}$ pro b , $\frac{1}{4}$ pro c , $-\frac{1}{6}$ pro d , & $\frac{1}{8}$ pro e ; vicissim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{2}z^7 + \&c.$

THEOREMA II. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \&c.$

$$\begin{aligned} \text{Et vicissim erit } y = & \frac{z}{a} \\ & - \frac{b}{a^3} z^3 \\ & + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^5 \\ & + \frac{5abc - a^2d - 12b^3}{a^7} z^7 \\ & + \frac{35b^4 - 45ad^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e}{a^9} z^9 + \&c. \end{aligned}$$

I

Exempli

Exempli gratia. Proponatur Aequatio ad Arcum circuli, $z = y + \frac{y^3}{6r}$
 $+ \frac{3y^5}{40r^3} + \frac{5y^7}{112r^5} + \&c.$ Et substitutis in Regula 1 pro a , $\frac{1}{6r}$ pro b , $\frac{3}{40r^3}$ pro c ,
 $\frac{5}{112r^5}$ pro d &c; orietur $y = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{504r^6} + \&c.$



*Fragmentum Epistolæ D. Newtoni, ad
 D. Wallisium Anno 1692, missæ.*

SUB finem Epistolæ anni 1676 [*Hæc sunt verba Wallisii*] scribit
 [D. Newtonus] etiam Problema determinandi Curvas per con-
 ditiones Tangentium in sua potestate esse, una cum aliis diffici-
 lioribus; ad quæ solvenda se usum esse dicit duplici methodo,
 una concinniore, altera generaliore; & utramque literis transpositis celat:
 quæ in ordinem redactæ hanc sententiam exhibent. *Una methodus consistit*
in Extrahione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus.
Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua
cætera commodè derivari possunt; Et in collatione terminorum homologorum
æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ Seriei. Harum methodo-
 rum Secunda ex verbis jam recitatis absque ulteriore explicatione intelligi
 potest; priorem ab Authore jam accepi ut sequitur.

Hæc methodus, ait, ejusdem est generis cum ea pro extrahendo radices
 ex æquationibus affectis superius descripta. Pone quod Problema resolu-
 endum reducat ad æquationem fluentes quantitates y & z una cum
 earum fluxionibus \dot{y} & \dot{z} involventem, & quod fluxio ipsius z uniformis sit.
 Ut hæc fluxio ex æquatione evanescat, pro ea ponatur unitas, & manebit
 æquatio solas y , & z & \dot{y} involvens, quam *Resolvendam* vocat. Proponitur,
 inventio ipsius y in Serie infinita convergente, quæ solam z involvet. Hoc
 in aliquibus æquationibus impossibile est, in aliis præparationem æquatio-
 num requirit, ubi vero directe confici possit resolutio est hujusmodi.

PROBLEMA

* Estæt Epistola in Tom. 2. Operum Wallisii.

PROBLEMA.

Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.

RESOLUTIO.

Termini omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquantur nihilo, & ipsarum y & y dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimentur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quam ad hunc effectum requiritur; & fit kx^a terminus infimæ dignitatis eorum qui neque per y neque per ejus fluxionem y neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $kx^a y^b$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex singulis seorsim numerum $\frac{a-b+1}{a+1}$ sic, ut tot habeas ejusmodi numeros quot sunt termini. Horum numerorum maximus vocetur n , & z' erit dignitas primi termini Seriei. Pro ejus coefficiente ponatur a , & in æquatione quæ *resolvenda* dicitur scribe az' pro y , & raz'^{n-1} pro y ; ac termini omnes resultantes in quibus z ejusdem est dignitatis ac in termino kx^a , sub propriis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debite reducta dabit coefficientem a . Sic habes az' terminum primum Seriei.

OPERATIO SECUNDA.

Pro reliquis omnibus hujus Seriei terminis nondum inventis pone p , & habebis Æquationem $y = az' + p$, & inde etiam Æquationem $y = raz'^{n-1} + p$. In resolvenda, pro y & y scribe hos eorum valores & habebis Resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y : & ex hac Resolvenda primum extrahes terminum Seriei p eodem modo atque terminum primum Seriei totius $y = az' + p$ ex Resolvenda prima extraxisti.

OPERATIO TERTIA ET SEQUENTES.

Dein tertiam Resolvendam eadem ratione invenias atque secundam invenisti, & ex ea terminum tertium Seriei totius extrahes. Et similiter Resolvendam quartam invenies, & ex ea quartum Seriei terminum, & sic in infinitum. Series autem sic inventa erit radix Æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

EXEMPLUM.

Ex Aequatione $y^2z^2 - x^2zy - d^2xz + dxz^2 = 0$, extrahenda sit radix y . Pone $z = 1$, & Aequatio evadet $y^2 - x^2y - dd + dx = 0$, quæ est Resolvenda. Jam vero terminus infimus in quo nec y neque y reperitur, est dd , qui ipsi kx^2 æquatus dat $\lambda = 0$. Terminis reliquis y^2 , $-x^2y$ pone kx^2y^2 æqualem successive, & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, in secundo $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ fit in primo casu 0, in secundo -1 . Unde v est 0, & αx & αx^{v-1} sunt a & 0; quarum ultimæ duæ a & 0 in Resolvenda pro y & y scriptæ, producant $aa + \alpha x - dd + dx$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis x est λ seu 0, positi æquales nihilo dant $a = d$. Unde primus Seriei terminus αx evadit d .

OPERATIO SECUNDA.

Pro terminis reliquis pone p , & habebis æquationem $y = d + p$, & inde $y = p$; qui valores in Resolvenda pro y & y substituti dant Resolvendam novam $2dp + pp - xzp + dx = 0$, ubi p & p vices subeunt ipsarum y & y . Terminus unicus in quo nec p neque p reperitur est dx , qui cum termino kx^2 collatus dat $\lambda = 1$. Terminis reliquis $2dp$, pp & $-xzp$ pone kx^2p^2 æqualem successive; & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in secundo $\mu = 0$, $\alpha = 2$, & $\beta = 0$; & in tertio $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit primo casu 1, in secundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde v est 1, & αx & αx^{v-1} sunt αx & a . Termini duo ultimi αx & a in Resolvenda pro p & p respective scripti, producant $2d\alpha x + a^2x^1 - \alpha x^2 + dx$. Et termini $2d\alpha x$ & dx in quibus index dignitatis x est λ seu 1, positi æquales nihilo, dant $a = -\frac{1}{2}$. Unde αx , terminus primus Seriei p fit $-\frac{1}{2}x$.

OPERATIO TERTIA.

Pro terminis reliquis nondum inventis pone q & habebis æquationem $p = -\frac{1}{2}x + q$, & inde $p = -\frac{1}{2} + q$. Qui valores pro p & p in Resolvenda novissima substituti producant Resolvendam novam $2dq - xq + qq + \frac{1}{2}xz - xzq = 0$. Ubi q & q vices suppleant ipsorum y & y . Terminus unicus in quo neque q nec q reperitur est $\frac{1}{2}xz$, qui cum kx^2 collatus dat $\lambda = 2$. Terminis reliquis $2dq$, $-xq$, $+qq$, $-xzq$ pone kx^2q^2 æqualem successive; & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in secundo, $\mu = 1$,

$\mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$; in tertio, $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$: in quarto $\mu = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$: & inde $\frac{1-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit in primo casu 2, in secundo, tertio, & quarto 1. Et hinc r est 2, vel ax' & rxz^{-1} sunt ax^2 & $2xz$: qui valores in Refolvenda pro q & \dot{q} substituti dant $2dax^2 - ax^3 + aax^4 + \frac{1}{2}xz - 2ax^3$; & termini $2daxx + \frac{1}{2}xz$ in quibus index dignitatis x est λ seu 2, positi æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde ax' terminus primus Seriei q evadit $-\frac{3xz}{8d}$.

OPERATIO QUARTA.

Pro reliquis Seriei terminis nondum inventis pone r , & habebis æquationes $q = -\frac{3xz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3x}{4d} + \dot{r}$; & inde resolvendam novam $2dr + \frac{5x^3}{8d} - x\dot{r} + \frac{5x^4}{64d} - \frac{3x\dot{r}}{4d} + r\dot{r} - x\dot{r} = 0$; & ex ea per Methodum superiorem habebis $-\frac{5x^3}{16d}$ terminum primum Seriei r . Et sic pergitur in infinitum.

Est igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}x + q = d - \frac{1}{2}x - \frac{3xz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}x - \frac{3xz}{8d} - \frac{5x^3}{16d} - \dots$. Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures.

Et eadem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones secundas, tertias, quartas, ($\ddot{y}, \ddot{y}, \ddot{y}$) aliasque involventium, extrahi posse. His utitur radicem extractionibus ubi alia Methodi nil profunt. Nam in Epistola prædicta anni 1676 docet, quod in Solutione problematum de Tangentibus inverforum, casus aliqui dantur in quibus hæc Methodus generalis non requiritur: & particulariter, si in triangulo rectangulo quod ab ordinata, tangente, & interjacente parte abscissæ constituitur, relatio duorum quorumlibet e lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur; Problema absque Methodo hacce generali solvi poterit.

Methodi autem hæc omnes tam particulares quam generales collectim sumptæ, solutionem exhibent secundæ partis problematis, quod *Newtonus* sub initio istius Epistolæ his verbis proposuit. *Data equatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice versa.* Nam tota fluxionum Methodus in hujus directæ & inversæ solutione consistit.

Part of a Letter from Sir *Is. Newton*,
to Mr. *J. Collins*, Novemb. 8. 1676.

THere is no Curve-line express'd by any Equation of three terms, tho' the unknown quantities affect one another in it, or the Indices of their Dignities be surd quantities (Suppose $ax^a + bx^{\mu} + cy^{\tau} = 0$, where x signifies the Base, y the Ordinate, a, μ, τ the Indices of the dignities of x and y , and a, b, c known quantities with their signs + or —,) I say, there is no such Curve-line, but I can, in less than half a quarter of an hour, tell whether it may be Squar'd, or what are the simplest Figures it may be compar'd with, be those Figures Conic Sections, or others: And then by a direct and short way, (I dare say the shortest the nature of the thing admits of, for a general one,) I can compare them. And so if any two Figures express'd by such Equations be propounded, I can, by the same Rule compare them if they may be compar'd. This may seem a bold assertion, because it's hard to say a Figure may, or may not, be Squar'd, or Compar'd with another; but it's plain to me by the fountain I draw it from, tho' I will not undertake to prove it to others. The same Method extends to Equations of four Terms, and others also, but not so generally.

Fragmentum Epistolæ D. Newtoni ad D. Collinium,
Novemb. 8. 1676, *Latine redditum.*

Nulla extat Curva cujus Æquatio ex tribus constat terminis, in qua, licet quantitates incognitæ se mutuo afficiant, vel Indices dignitatum sint surdæ quantitates (v. g. $ax^a + bx^{\mu} + cy^{\tau} = 0$, ubi x designat Basim, y Ordinatam, a, μ, τ Indices dignitatum ipsius x & y , & a, b, c quantitates cognitæ una cum signis suis + vel —) nulla inquam hujusmodi est Curva, de qua, an Quadrari possit, necne, vel quænam sint Figuræ simplicissimæ quibuscum comparari possit, sive sint Conicæ sectiones sive aliæ magis complicatæ, intra horæ octantem respondere non possim. Deinde * methodo directâ & brevi, imo methodorum omnium generalium brevissima eas comparare queo. Quinetiam si duæ quævis Figuræ per hujusmodi Æquationes expressæ proponantur, per eandem Regulam, eas, modo comparari possint, comparo.

Affirmatio quidem videri potest temeraria, propterea quod perdifficile sit dictu an Figura Quadrari vel cum alia comparari possit, necne; mihi autem manifestum est, ex eo unde deduxi fonte, quanquam id aliis demonstrare in me suscipere nollem. Eadem methodus Æquationes quatuor terminorum aliasque complectitur, haud tamen adeo generaliter.

* Methodum habes in Coroll. 2. Prop. 10. Traß. sequenti.



TRACTATUS

D E

Quadratura Curvarum.



INTRODUCTIO

A D

Quadraturam Curvarum.



Quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic confidero. Lineæ describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearem, solida per motum superficialium, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris. Hæ Geneses in rerum natura locum vere habent & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc

modum Veteres docuendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium generari docuerunt reſtangularum.

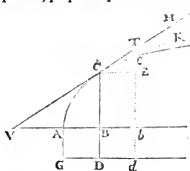
Conſiderando igitur quod quantitates æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori qua crescent ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones* & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim Annis 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum qua hic usus sum in Quadratura Curvarum.

L

Fluxio-

Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita, & ut accurate loquar, sunt in prima ratione augmentorum nascentium; exponi autem possunt per lineas quasvis quæ sunt ipsis proportionales.

Ut si areæ ABC, ABDG Ordinatis BC, BD super basi AB uniformi cum motu progredientibus describantur, harum arearum fluxiones erunt inter se ut Ordinatæ describentes BC & BD, & per Ordinatas illas exponi possunt, propterea quod Ordinatæ illæ sunt ut arearum augmenta nascentia.



& CT & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est per latera trianguli confimilis VBC.

Eodem recidit si sumantur fluxiones in ultima ratione partium evanescentium. Agatur recta Cc & producat eadem ad K. Redeat Ordinata bc in locum suum priorem BC, & coeuntibus punctis C & c, recta CK coincidet cum tangente CH, & triangulum evanescent CcE in ultima sua forma evadet simile triangulo CET, & ejus latera evanescentia CE, Ec & Cc erunt ultimo inter se ut sunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT, & propterea in hac ratione sunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & c parvo quovis intervallo ab invicem distant recta CK parvo intervallo a tangente CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat & rationes ultimæ linearum CE, Ec & Cc inveniantur, debent puncta C & c coire & omnino coincidere. Errores quam minimi in rebus Mathematicis non sunt contemnendi.

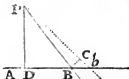
Simili argumento si circulus centro B radio BC descriptus in longitudinem Abscissæ AB ad angulos rectos uniformi cum motu ducatur, fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio superficiei ejus erit ut perimeter Circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim.

Nam

Nam quo tempore solidum ABC generatur ducendo circumulum illum in longitudinem abscissæ AB, eodem superficies ejus generatur ducendo perimetrum circuli illius in longitudinem Curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ sequuntur.

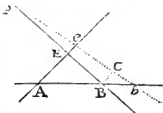
Recta PB circa polum datum P revolvens secet aliam positione datam rectam AB: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & PB.

Progrediatur recta PB de loco suo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipsi PB æqualis, & ad AB ducatur PD sic, ut angulus bPD æqualis sit angulo bBC; & ob similitudinem triangulorum bBC, bPD erit augmentum Bb ad augmentum Cb ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum suum priorem PB ut augmenta illa evanescant, & evanescens ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ est PB ad DB, existente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione est fluxio ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.



Recta PB circa datum Polum P revolvens secet alias duas positione datas rectas AB & AE in B & E: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & AE.

Progrediatur recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum Pb rectas AB, AE in punctis b & e secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur ipsi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC ut Ab ad Ae, & BC ad Ee ut PB ad PE, & conjunctis rationibus Bb ad Ee ut Ab × PB ad Ae × PE. Redeat jam linea Pb in locum suum priorem PB, & augmentum evanescens Bb erit ad augmentum evanescens Ee ut Ab × PB ad Ae × PE, ideoque in hac ratione est fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.



Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis Curvas positione datas secet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE Curvas illas tangent in Sectionum punctis B & E: erit fluxio Curvæ quam recta AB tangit ad fluxionem Curvæ quam recta AE tangit ut Ab × PB ad Ae × PE. Id quod etiam eveniet si recta PB Curvam aliquam positione datam perpetuo tangat in puncto mobili P.

Flux quantitas x uniformiter & inveniendæ sit fluxio quantitatis xⁿ. Quo tempore quantitas x fluendo evadit x + o, quantitas xⁿ evadet x + oⁿ, id est per methodum serierum infinitarum, xⁿ + noxⁿ⁻¹ + $\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}$ + &c.

Et

Et augmenta o & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$ sunt ad invicem ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$ Evanescant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1} : ideoque fluxio quantitatis x est ad fluxionem quantitatis x^n ut 1 ad nx^{n-1} .

Similibus argumentis per methodum rationum primarum & ultimarum colligi possunt fluxiones linearum seu rectorum seu curvarum in casibus quibuscunque, ut & fluxiones superficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitibus Analyfin sic instituere, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est Geometrix Veterum : & volui ostendere quod in Methodo Fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen potest Analysis in figuris quibuscunque seu finitis seu infinite parvis quæ figuris evanescentibus finguntur similes, ut & in figuris quæ per Methodos Indivisibilium pro infinite parvis haberi solent, modo caute procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluentes Problema difficilius est, & solutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum ; de qua sequentia olim scripsi.





D E

Quadratura Curvarum.

Quantitates indeterminatas ut motu perpetuo crescentes vel decrescentes, id est ut fluentes vel defluentes in sequentibus confidero, designoque literis z, y, x, v , & earum fluxiones seu celeritates crescendi noto iisdem literis punctatis $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, Sunt & harum fluxionum fluxiones seu mutationes magis aut minus celeres quas ipsarum z, y, x, v , fluxiones secundas nominare licet & sic designare $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & harum fluxiones primas seu ipsarum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ fluxiones tertias sic $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$, & quartas sic $\ddddot{z}, \ddddot{y}, \ddddot{x}, \ddddot{v}$. Et quemadmodum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ sunt fluxiones quantitatum $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v : sic hæ quantitates considerari possunt ut fluxiones aliarum quas sic designabo, $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, & hæ ut fluxiones aliarum $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & hæ ut fluxiones aliarum $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$. Designant igitur $\dot{z}, \dot{z}, \dot{z}, \dot{z}, \dot{z}, \dot{z}, \dot{z}, \dot{z}$, &c. seriem quantitatum quarum quælibet posterior est fluxio præcedentis & quælibet prior est fluens quantitas fluxionem habens subsequentem. Similis est series $\sqrt{ax-xx}, \sqrt{ax-xx}, \sqrt{ax-xx}, \sqrt{ax-xx}, \sqrt{ax-xx}, \sqrt{ax-xx}, \sqrt{ax-xx}, \sqrt{ax-xx}$, ut & series $\frac{ax+xx}{a-x}, \frac{ax+xx}{a-x}, \frac{ax+xx}{a-x}, \frac{ax+xx}{a-x}, \frac{ax+xx}{a-x}, \frac{ax+xx}{a-x}, \frac{ax+xx}{a-x}, \frac{ax+xx}{a-x}$.

Et notandum est quod quantitas quælibet prior in his seriebus est ut area figuræ curvilinearis cujus ordinatim applicata rectangula est quantitas posterior & abscissa est z : uti $\sqrt{ax-xx}$ area curvæ cujus ordinata est $\sqrt{ax-xx}$ & abscissa z . Quo autem spectant hæc omnia patebit in Propositionibus quæ sequuntur.

M

PROP.

PROP. I. PROB. I.

Data æquatione quocunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones.

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujusque fluentis quam involvit, & in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem suam, & aggregatum factorum omnium sub propriis signis erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primo per indices dignitatum x , & in singulis multiplicationibus pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis, scribatur \dot{x} , & summa factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $a^2\dot{z}$. Ponatur summa factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Dico quod hac æquatione definitur relatio fluxionum.

Demonstratio.

Nam sit o quantitas admodum parva & sunt $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$, quantitatum z, y, x momenta id est incrementa momentanea synchrona. Et si quantitates fluentes jam sunt z, y & x hæc post momentum temporis incrementis suis $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$ auctæ, evadent $z + o\dot{z}, y + o\dot{y}, x + o\dot{x}$, quæ in æquatione prima pro z, y , & x scriptæ dant æquationem $x^3 + 3x^2o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}x + o^3\dot{x}^3 - xy^2 - 2xyo\dot{y} - 2xo^2\dot{y}y - xo^3\dot{y}^2 + a^2z + a^2o\dot{z} - b^3 = 0$.

Subducatur æquatio prior, & residuum divisum per o erit $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}xo\dot{x} + \dot{x}^3o^3 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} - 2xo^2\dot{y}y - xo^3\dot{y}^2 + a^2\dot{z} = 0$. Minuatur quantitas o in infinitum, & neglectis terminis evanescentibus restabit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Q. E. D.

Explicatio.

Explicatio plenior.

Ad eundem modum si æquatio effet $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$, produceretur $3x^2\dot{x} - \dot{xy}^2 - 2xy\dot{y} + a^2\sqrt{ax-yy} = 0$. Ubi si fluxionem $\sqrt{ax-yy}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax-yy} = z$, & erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc Propositionem) $a\dot{x} - 2y\dot{y} = 2zx\dot{z}$ seu $\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \dot{z}$, hoc est $\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax-yy}} = \sqrt{ax-yy}$. Et inde $3x^2\dot{x} - \dot{xy}^2 - 2xy\dot{y} + \frac{a^2\dot{x} - 2a^2y\dot{y}}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$.

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & fiet per operationem primam $\dot{zy}^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4z\dot{z}^3 = 0$, per secundam $\ddot{zy}^3 + 6z\ddot{y}y^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2\dot{y} - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}^2\dot{z}^2 = 0$, per tertiam $\ddot{\ddot{zy}}^3 + 9z\ddot{\ddot{y}}y^2 + 9z\ddot{y}\dot{y}^2 + 18z\dot{y}^2\dot{y} + 18z\dot{y}\dot{y}^2 + 6z\dot{y}^3 - 4\ddot{\ddot{z}}z^3 - 36\ddot{z}\dot{z}^2 - 24\dot{z}^3\dot{z} = 0$.

Ubi vero sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus fluxione prima unitatem scribere, pro secunda vero & sequentibus nihil. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, ut supra; & fluat z uniformiter, sitque ejus fluxio unitas, & fiet per operationem primam $y^3 + 3zy^2 - 4z^3 = 0$, per secundam $6y^2 + 3z\dot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y - 12z^2 = 0$, per tertiam $9\dot{y}y^2 + 18y^2\dot{y} + 3z\dot{y}^2y + 18z\dot{y}\dot{y}^2 + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0$.

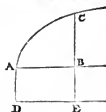
In hujus autem generis æquationibus concipiendum est quod fluxiones in singulis terminis sint ejusdem ordinis, id est vel omnes primi ordinis \dot{y} , \dot{z} , vel omnes secundi \ddot{y} , \ddot{z} , \ddot{z} , vel omnes tertii $\ddot{\ddot{y}}$, $\ddot{\ddot{y}}$, $\ddot{\ddot{z}}$, \dot{y}^2 , $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, &c. Et ubi res aliter se habet complendus est ordo per subintellektas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis. Sic æquatio novissima complendo ordinem tertium fit $9z\ddot{\ddot{y}}y^2 + 18z\dot{y}^2\dot{y} + 3z\dot{y}^2\dot{y}^2 + 18z\dot{y}\dot{y}^2 + 6z\dot{y}^3 - 24z\dot{z}^3 = 0$.

PROP.

PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ quadrari possunt.

Sit ABC figura invenienda, BC Ordinatum applicata rectangula, & AB abscissa. Producat CB ad E ut fit BE = 1, & compleatur parallelogrammum ABED: & arearum ABC, ABED fluxiones erunt ut BC & BE. Assumatur igitur æquatio quævis qua ratio arearum definiatur, & inde dabitur ratio ordinatarum BC & BE per Prop. I. Q. E. I.



Hujus rei exempla habentur in Propositionibus duabus sequentibus.

PROP. III. THEOR. I.

Si pro abscissa AB & area AE seu $AB \times 1$ promiscue scribatur z , & si pro $e + fx^2 + gx^{2n} + bx^{2m} + \&c.$ scribatur R : fit autem area Curvæ $z^3 R^{\lambda}$, erit ordinatum applicata BC æqualis

$$\frac{0e + 0 \times fx^2 + 0 \times gx^{2n} + 0 \times bx^{2m} + \&c. \times z^{3-1} R^{\lambda-1}}{+ \lambda n \quad + 2 \lambda n \quad + 3 \lambda n}$$

Demonstratio.

Nam si fit $z^3 R^{\lambda} = v$, erit (per Prop. I) $3z^2 \dot{z} R^{\lambda} + \lambda z^3 \dot{R} R^{\lambda-1} = \dot{v}$.

Pro R^{λ} in primo æquationis termino & z^3 in secundo scribe $RR^{\lambda-1}$ & zz^3-1 , & fiet $3z^2 \dot{z} R + \lambda z^3 \dot{R}$ in $z^{3-1} R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Erat autem $R = e + fx^2 + gx^{2n} + bx^{2m} + \&c.$ et inde (per Prop. I) fit $\dot{R} = 2fx \dot{x} + 2n gx^{2n-1} \dot{x} + 2m bx^{2m-1} \dot{x} + \&c.$ quibus substitutis & scripta BE seu 1 pro \dot{z} , fiet

$$\frac{0e + 0 \times fx^2 + 0 \times gx^{2n} + 0 \times bx^{2m} + \&c. \times z^{3-1} R^{\lambda-1}}{+ \lambda n \quad + 2 \lambda n \quad + 3 \lambda n} = \dot{v} = BC.$$

Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ absciffa AB fit z , & fi pro $e + fz^2 + gz^{2n} + \&c.$ scribatur R , & pro $k + lz^2 + mz^{2n} + \&c.$ scribatur S ; fit autem area Curvæ $z^3 R^{\lambda} S^{\mu}$: Erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\left. \begin{array}{l} \theta ek + \theta \times f k z^2 + \theta \times g k z^{2n} \dots * \dots * \dots \\ + \lambda \eta \\ + \theta \times e l z^2 + \theta \times f l z^{2n} + \theta \times g l z^{2n} \dots * \dots \\ + \mu \eta \\ + \theta \times c m z^{2n} + \theta \times f m z^{2n} + \theta \times g m z^{2n} \\ + 2 \mu \eta \end{array} \right\} \times z^{3-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$$

Demonstratur ad modum Propositionis superioris.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ absciffa AB fit z , & pro $e + fz^2 + gz^{2n} + bz^{2n} + \&c.$ scribatur R : fit autem Ordinatum applicata $z^{3-1} R^{\lambda-1} \times a + b z^2 + c z^{2n} + d z^{2n} + \&c.$ & ponatur $\frac{a}{r} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, $t + \lambda = v$, &c.

$$\begin{aligned} \text{Erit Area} &= z^3 R^{\lambda} \ln + \frac{\frac{1}{r} a}{r e} \\ &+ \frac{\frac{1}{r} b - s f A}{r + 1 \times e} z^n \\ &+ \frac{\frac{1}{r} c - s + 1 \times f B - t g A}{r + 2 \times e} z^{2n} \\ &+ \frac{\frac{1}{r} d - s + 1 \times f C - t + 1 \times g B - v b A}{r + 3 \times e} z^{3n} \\ &+ \frac{-s + 1 \times f D - t + 1 \times g C - v + 1 \times b B}{r + 4 \times e} z^{4n} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Ubi A, B, C, D , &c. denotant totas coefficientes datas terminorum singulorum in serie cum signis suis $+$ & $-$, nempe

A primi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{r} a}{r e}$

B secundi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{r} b - s f A}{r + 1 \times e}$

C tertii termini coefficientem $\frac{\frac{1}{r} c - s + 1 \times f B - t g A}{r + 2 \times e}$

Et sic deinceps. N

Demonstratio

Demonstratio.

Sunto juxta Propositionem tertiam.

CURVARUM ORDINATÆ	AREÆ
1. $\theta eA + \theta \times fAz^3 + \theta \times gAz^{2n} + \theta \times bAz^{2n}, \&c.$	$\left\{ \begin{array}{l} Az^3 R^\lambda \\ Bz^{3+2n} R^\lambda \\ Cz^{3+2n} R^\lambda \\ Dz^{3+2n} R^\lambda \end{array} \right\} \times z^{3-1} R^{\lambda-1}$
2. $\dots + \frac{\theta}{1+\lambda n} \times eBz^3 + \frac{\theta}{1+n} \times fBz^{2n} + \frac{\theta}{1+n} \times gBz^{2n} \&c.$	
3. $\dots + \frac{\theta}{1+2n} \times eCz^{2n} + \frac{\theta}{1+2n} \times fCz^{2n} \&c.$	
4. $\dots + \frac{\theta}{1+3n} \times eDz^{2n} \&c.$	

Et si summa Ordinarum ponatur æqualis Ordinatæ $a + bz^3 + cz^{2n} + dz^{2n} + \&c.$ in $z^{3-1} R^{\lambda-1}$, summa arearum $z^3 R^\lambda$ in $A + Bz^3 + Cz^{2n} + Dz^{2n} + \&c.$ æqualis erit areæ Curvæ cujus ista est Ordinata. Aequentur igitur Ordinarum termini correspondentes,

$$\text{et sic } a = \theta eA,$$

$$b = \frac{\theta}{1+\lambda n} \times fA + \frac{\theta}{1+n} \times eB,$$

$$c = \frac{\theta}{1+2\lambda n} \times gA + \frac{\theta}{1+n+\lambda n} \times fB + \frac{\theta}{1+2n} \times eC, \&c.$$

$$\text{et inde } A = \frac{a}{\theta e}$$

$$B = \frac{b - \frac{\theta}{1+\lambda n} \times fA}{\frac{\theta}{1+n} \times e}$$

$$C = \frac{c - \frac{\theta}{1+2\lambda n} \times gA - \frac{\theta}{1+n+\lambda n} \times fB}{\frac{\theta}{1+2n} \times e}$$

Et sic deinceps in infinitum.

Pone jam $\frac{\theta}{n} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, &c. et in area $z^3 R^\lambda$ in $A + Bz^3 + Cz^{2n} + Dz^{2n} + \&c.$ scribe ipsorum A, B, C , &c. valores inventos, & prodibit series proposita. Q. E. D.

Et notandum est quod Ordinata omnis duobus modis in seriem resolvitur. Nam index n vel affirmativus esse potest vel negativus.

Proponatur Ordinata $\frac{3k - lzx}{\sqrt[3]{kx - lzx^3 + mx^3}}$: Hæc vel sic scribi potest

$$x^{-\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{3k - lzx^3 + mx^3} - lzx^3 + mx^3 \Big|^{-\frac{1}{3}},$$

$$\text{vel sic } x^{-2} \times \sqrt[3]{l + 3kx^{-2} + m} - lzx^{-1} + kx^{-1} \Big|^{-\frac{1}{3}}.$$

In

In casu priore est $a = 3k$, $b = 0$, $c = -l$, $e = k$, $f = 0$, $g = -l$, $h = m$, $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = 1$, $\theta = 1 = -\frac{1}{3}$, $\phi = -\frac{1}{3} = r$, $s = -1$, $t = -\frac{1}{3}$, $v = 0$.

In posteriore est $a = -l$, $b = 0$, $c = 3k$, $e = m$, $f = -l$, $g = 0$, $h = k$, $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = -1$, $\theta = 1 = -2$, $\phi = -1$, $r = 1$, $s = 1\frac{1}{3}$, $t = 2$, $v = 2\frac{1}{3}$. Tentandus est casus uterque. Et si serierum alterutra ob terminos tandem deficientes abrumptitur ac terminatur habebitur area Curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore casu scribendo in serie valores ipsorum $a, b, c, e, f, g, h, \lambda, \theta, r, s, t, v$, termini omnes post primum evanescunt in infinitum & area Curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k - \frac{1}{3}l + m}{x^3}}$.

Et hæc area ob signum negativum adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abscissæ quam ordinatæ, negativa vero cadit ad contrarias partes ordinatæ & adjacet abscissæ productæ, manente scilicet signo Ordinatæ. Hoc modo series alterutra & nonnunquam utraque semper terminatur & finita evadit si Curva geometrice quadrari potest. At si Curva talem quadraturam non admittit, series utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget & aream dabit approximando, præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel nihil est vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{x^2}{e}$ æqualis est unitati.

Si $\frac{x^2}{e}$ minor est unitate, converget series in qua index n affirmativus est : si $\frac{x^2}{e}$ unitate major est, converget series altera. Si in uno casu area adjacet abscissæ ad usque ordinatam ductæ, in altero adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ.

Nota insuper quod si Ordinata contentum est sub factore rationali Q & factore surdo irreducibili R^r & factoris surdi latus R non dividit factorem rationalem Q , erit $\lambda - 1 = \pi$ & $R^{\lambda-1} = R^\pi$. Sin factoris surdi latus R dividit factorem rationalem semel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+1}$: si dividit bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$: si ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$: & sic deinceps.

Si Ordinata est fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis composito : resolvendus est denominator in divisores suos omnes primos. Et si divisor sit aliquis cui nullus alius est æqualis, Curva quadrari nequit : Sin duo vel plures sint divisores æquales, rejiciendus est eorum unus, & si adhuc alii duo vel plures sint sibi mutuo æquales & prioribus inæquales, rejiciendus est etiam eorum unus, & sic in aliis omnibus æqualibus si adhuc plures sint : deinde divisor qui relinquitur vel contentum sub divisoribus omnibus qui relinquuntur, si plures sunt, ponendum est pro R , & ejus quadrari reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, præterquam ubi contentum illud est quadrarum vel cubus vel quadrato quadratum, &c. quo casu ejus latus ponendum est pro R & potestatis index 2 vel 3 vel 4 negative sumptus pro λ , et Ordinata ad denominatorem R^1 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda.

Ut

Ut si Ordinata sit $\frac{x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}}{x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + 2x - 4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis est & denominatoris divisores sunt pares, nempe $x-1$, $x-1$, $x-1$ & $x+2$, $x+2$, rejicio magnitudinis utriusque divisorem unum, & reliquorum $x-1$, $x-1$, $x+2$ contentum $x^2 - 3x + 2$ pono pro R & ejus quadrati reciprocum $\frac{1}{R^2}$ seu R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad denominatorem R^3 seu $R^{1-\lambda}$ reduco, & fit $\frac{x^6 - 5x^4 + 8x^2}{x^3 - 3x + 2}$, i.e. $x^3 \times 8 - 9x + x^2 \times 2 - 3x + x^2 \times 2$. Et inde est $a=8$, $b=-9$, $c=0$, $d=1$, &c. $e=2$, $f=-3$, $g=0$, $b=1$, $\lambda-1=-2$, $\lambda=-1$, $\mu=1$, $\theta-1=3$, $\theta=4$, $r=3$, $t=2$, $v=1$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{x^4}{x^3 - 3x + 2}$, terminis omnibus in tota serie post primum evanescentibus.

Si denique Ordinata est fractio irreducibilis & ejus denominator contentum est sub factore rationali Q & factore surdo irreducibili R^m , inveniendi sunt lateris R divisores omnes primi, & rejiciendus est divisor unus magnitudinis cujusque & per divisores qui restant, siqui sint, multiplicandus est factor rationalis Q : & si factum æquale est lateri R vel lateris illius potestati alicuius cujus index est numerus integer, esto index ille m , & erit $\lambda-1=-m$, & $R^{\lambda-1}=R^{-m}$.

Ut si Ordinata sit $\frac{3q^3 - q^4x + 6q^2x^2 - q^4x^3 - 6x^3}{q^3 - x^2 + q^3x + q^2x - qx^2 - x^3}$, quoniam factoris surdi lateris R seu $q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$ divisores habet $q+x$, $q+x$, $q-x$ qui duarum sunt magnitudinum, rejicio divisorem unum magnitudinis utriusque & per divisorem $q+x$ qui relinquitur, multiplico factorem rationalem $q^3 - x^2$. Et quoniam factum $q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$ æquale est lateri R , pono $m=1$, & inde, cum π sit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda-1=-\frac{1}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad denominatorem $R^{-\frac{1}{3}}$, & fit

$x^0 \times 3q^6 + 2q^3x + 8q^4x^2 + 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5 \times q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$. Unde est $a=3q^6$, $b=2q^3$ &c. $e=q^3$, $f=q^2$ &c. $\theta-1=0$, $\theta=1$, $\mu=1$, $\lambda=-\frac{1}{3}$, $r=1$, $s=\frac{1}{3}$, $t=\frac{1}{3}$, $v=0$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{3q^3x + 3x^3}{q^3 + q^2x - qx^2 - x^3}$, terminis omnibus in serie tota post tertium evanescentibus.

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abscissa AB sitz, & scribantur R pro $e + fx^2 + gx^3 + bx^4 + \dots$ & S pro $k + lx^2 + mx^3 + nx^4 + \dots$ fit autem Ordinatum applicata $x^{2-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$ in $a + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$ et si terminorum, e , f , g , b , &c. et k , l , m , n , &c. rectangula sint

$$\begin{array}{ccccccc} ek & fk & gk & bk & \&c. \\ el & fl & gl & bl & \&c. \\ em & fm & gm & bm & \&c. \\ en & fn & gn & bn & \&c. \end{array}$$

Et

Et si reſtangularum illorum coefficientes numerales ſint reſpective

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} &= r. & r + \lambda &= s. & s + \lambda &= t. & t + \lambda &= v. & \mathcal{E}c. \\ r + \mu &= s. & s + \mu &= t. & t + \mu &= v. & v + \mu &= w. & \mathcal{E}c. \\ s + \mu &= t. & t + \mu &= v. & v + \mu &= w. & w + \mu &= x. & \mathcal{E}c. \\ t + \mu &= v. & v + \mu &= w. & w + \mu &= x. & x + \mu &= y. & \mathcal{E}c. \end{aligned}$$

Area Curvæ erit hæc

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} R^{\lambda} S^{\mu} \text{ in } &+ \frac{\frac{1}{2}a}{r \epsilon k} \\ &+ \frac{\frac{1}{2}b \frac{-f k A}{-s \epsilon l}}{r^{\frac{1}{2}+1} \times \epsilon k} z^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\frac{1}{2}c \frac{-f k B - l f l}{-s^{\frac{1}{2}+1} \times \epsilon l}}{r^{\frac{1}{2}+2} \times \epsilon k} z^{\frac{3}{2}} \\ &+ \frac{\frac{1}{2}d \frac{-f k C - l^{\frac{1}{2}+1} \times g k B - v b k A}{-s^{\frac{1}{2}+2} \times \epsilon l}}{r^{\frac{1}{2}+3} \times \epsilon k} z^{\frac{5}{2}} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Ubi A denotat termini primi coefficientem datam $\frac{\frac{1}{2}a}{r \epsilon k}$ cum ſigno ſuo $+$ vel $-$, B coefficientem datam ſecundi, C coefficientem datam tertii, & ſic deinceps. Terminorum vero, $a, b, c, \&c. e, f, g, \&c. k, l, m, \&c.$ unus vel plures deefſe poſſunt.

Demonſtratur Propoſitio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic obtinent. Pergit autem ſeries talium Propoſitionum in infinitum, & progreſſio ſeriei manifeſta eſt.

P R O P. VII. T H E O R. V.

Si pro $e + f x^{\frac{1}{2}} + g x^{\frac{3}{2}} + \&c.$ ſcribatur R ut ſupra, & in Curvæ alicujus Ordinata $z^{\frac{1}{2}} = R^{\frac{1}{2}}$ maneat quantitates datæ $\theta, n, \lambda, e, f, g, \&c.$ et pro σ ac τ ſcribantur ſucceſſive numeri quicunque integri: & ſi detur Area unius ex Curvis quæ per Ordinatæ innumeras ſic prodeuntes designantur ſi Ordinatæ ſunt duorum nominum in vinculo radicis, vel ſi dentur Aræ duarum ex Curvis ſi Ordinatæ ſunt trium nominum in vinculo radicis, vel Aræ trium ex Curvis ſi Ordinatæ ſunt quatuor nominum in vinculo radicis, & ſic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Aræ curvarum omnium.

O

Pro

Pro nominibus hic habeo terminos omnes in vinculo radice tam deficientes quam plenos quorum indices dignitatum sunt in progressionem arithmetica. Sic Ordinata $\sqrt{a^2 - ax^2 + x^4}$ ob terminos duos inter a^2 & $-ax^2$ deficientes pro quinquinomio haberi debet. At $\sqrt{a^2 + x^4}$ binomium est, & $\sqrt{a^2 + x^4 - \frac{x^8}{a^2}}$ trinomium, cum progressio jam per majores differentias procedat. Propositio vero sic demonstratur.

C A S. I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatae $px^{g-1}R^{\lambda-1}$ & $qx^{g+1-1}R^{\lambda-1}$, & Areae pA & qB , existente R quantitate trium nominum $e + fz^2 + gz^{2g}$. Et cum per Prop. 3. sit $z^g R^{\lambda}$ area Curvae cujus Ordinata est $\theta e + \frac{\theta + \lambda g}{\theta} \times fz^2 + \frac{\theta + 2\lambda g}{\theta} \times gz^{2g}$ in $z^{g-1}R^{\lambda-1}$, subduc Ordinatas & Areas priores de Area & Ordinata posteriori, & manebit $\theta e - p + \frac{\theta \times f - q \times z^2}{\theta + \lambda g} + \frac{\theta \times gz^{2g} \times z^{g-1}R^{\lambda-1}}{\theta + 2\lambda g}$ Ordinata nova Curvae, et $z^g R^{\lambda} - pA - qB$ ejusdem Area. Pone $\theta e = p$, & $\theta f + \lambda g f = q$, & Ordinata evadet $\frac{\theta + 2\lambda g}{\theta} \times gz^{2g} \times z^{g-1}R^{\lambda-1}$, & Area $z^g R^{\lambda} - \theta eA - \theta fB - \lambda g fB$. Divide utramque per $\theta g + 2\lambda g$, & Aream prodeuntem dic C , & assumpta utcumque r , erit rC Area Curvae cujus Ordinata est $rz^{g+2g-1}R^{\lambda-1}$. Et qua ratione ex Area pA & qB Aream rC Ordinatae $rz^{g+2g-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenimus, licebit ex Area qB & rC Aream quartam puta sD , Ordinatae $sz^{g+3g-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenire, & sic deinceps in infinitum. Et par est ratio progressionis ab Area B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ , $\theta + \lambda g$, & $\theta + 2\lambda g$ aliquis deficit & seriem abruptur, assumatur Area pA in principio progressionis unius & Area qB in principio alterius, & ex his duabus Area dabitur Area omnes in progressionem utraque. Et contra, ex aliis duabus Area assumptis fit regressus per Analysin ad Areas A & B , adeo ut ex duabus datis ceterae omnes dentur. Q. E. O.

Hic est casus Curvarum ubi ipsius z index θ augetur vel diminuitur perpetua additione vel subtractione quantitatis n . Casus alter est Curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

C A S. II.

Ordinatae $px^{g-1}R^{\lambda}$ et $qx^{g+1-1}R^{\lambda}$, quibus Areae pA et qB jam respondeant, si in R seu $e + fz^2 + gz^{2g}$ ducantur ac deinde ad R vicissim applicentur, evadunt $pe + pfz^2 + pgz^{2g} \times z^{g-1}R^{\lambda-1}$, et $qex^2 + qfz^{2g} + qgz^{2g} \times z^{g-1}R^{\lambda-1}$.

Et (per Prop. 3.) est $ax^g R^{\lambda}$ area Curvae cujus Ordinata est $\theta \cdot \theta e + \frac{\theta + \lambda g}{\theta} \times pfz^2 + \frac{\theta + 2\lambda g}{\theta} \times pgz^{2g} \times z^{g-1}R^{\lambda-1}$, et $bz^{g+1}R^{\lambda}$ area Curvae cujus

cujus Ordinata est $\theta + n \times b e z^{\lambda} + \theta + n + \lambda n \times b f z^{\lambda+1} + \theta + n + 2\lambda n \times b g z^{\lambda+2} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$.

Et harum quatuor Arearum summa est $pA + qB + az^{\theta} R^{\lambda} + bz^{\theta+1} R^{\lambda}$, & summa respondentium Ordinarum

$$\begin{array}{r} \theta a e + \theta + \lambda n \times a f z^{\lambda} + \theta + 2\lambda n \times a g z^{\lambda+1} + \theta + n + 2\lambda n \times b g z^{\lambda+2} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1} \\ + p e + \theta + n \times b e + \theta + n + \lambda n \times b f + 1 \times q g \\ + 1 \times p f + 1 \times p g + 1 \times q e + 1 \times q f \end{array}$$

Si terminus primus tertius & quartus ponantur seorsim aequales nihilo, per primum fiet $\theta a e + p e = 0$, seu $-\theta a = p$, per quartum $-\theta b = a b - 2\lambda n b = q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f} = b$. Unde secundus fit $\frac{\lambda a f f - 4 \lambda^2 a g e}{f}$, adeoque summa quatuor Ordinarum est $\frac{\lambda a f f - 4 \lambda^2 a g e}{f} z^{\theta+1} R^{\lambda-1}$, & summa totidem respondentium Arearum est $az^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2ag}{f} z^{\theta+1} R^{\lambda} - \theta a A + \frac{\lambda^2 a f f - 4 \lambda^2 a g e}{f} a g B$. Dividuntur hæ summæ per $\frac{\lambda a f f - 4 \lambda^2 a g e}{f}$, & si Quotum posterius dicatur D , erit D Area curvæ cujus Ordinata est Quotum prius $z^{\theta+1} R^{\lambda-1}$. Et eadem ratione ponendo omnes Ordinatæ terminos præter primum æquales nihilo potest Area Curvæ inveniri cujus Ordinata est $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$. Dicatur Area ista C , & qua ratione ex Areis A & B inventæ sunt Area C ac D , ex his Areis C ac D inveniri possunt alix duæ E & F Ordinatis $z^{\theta-1} R^{\lambda-2}$ et $z^{\theta+1} R^{\lambda-2}$ congruentes, & sic deinceps in infinitum. Et per Analyfin contrariam regredi licet ab Areis E & F ad Areas C ac D , & inde ad Areas A & B , aliasque quæ in progressionem sequuntur. Igitur si index λ perpetua unitatum additione vel subtractione augeatur vel minuat, & ex Areis quæ Ordinatis sic prodeuntibus respondent duæ simplicissimæ habentur; dantur alix omnes in infinitum. Q. E. O.

C A S. III.

Et per casus hosce duos conjunctos, si tam index θ perpetua additione vel subtractione ipsius λ , quam index λ perpetua additione vel subtractione unitatis, utrunque augeatur vel minuatur, dabuntur Areae singulis prodeuntibus Ordinatis respondentes. Q. E. O.

C A S. IV.

Et simili argumento si Ordinata constet ex quatuor nominibus in vinculo radicali & dantur tres Arearum, vel si constet ex quinque nominibus & dantur quatuor Arearum, & sic deinceps: dabuntur Areae omnes quæ addendo

dendo vel subducendo numerum n indici θ vel unitatem indici λ generari possunt. Et par est ratio Curvarum ubi Ordinatz ex binomiis constantur, & Area una earum quæ non sunt Geometricæ quadrabiles datur. Q. E. O.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e + fz' + gz'' + \&c.$ et $k + lz' + mz'' + \&c.$ scribantur R & S ut supra, & in Curvæ alicujus Ordinata $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\nu-1}$ maneant quantitates datæ $\theta, n, \lambda, \mu, e, f, g, k, l, m, \&c.$ et pro $\sigma, \tau, \& \upsilon$, scribantur successive numeri quicunque integri: & si dentur Areæ duarum ex curvis quæ per Ordinatas sic prodeunt designantur si quantitates R & S sunt binomia, vel si dentur Areæ trium ex curvis si R & S conjunctim ex quinque nominibus constant, vel Areæ quatuor ex curvis si R & S conjunctim ex sex nominibus constant, & lic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areæ curvarum omnium.

Demonstratur ad modum propositionis superioris.

PROP. IX. THEOR. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter se quarum Ordinatz sunt reciproce ut fluxiones Abscissarum.

Nam contenta sub Ordinatis & fluxionibus Abscissarum erunt æqualia, & fluxiones Arearum sunt ut hæc contenta.

COROL. I.

Si assumatur relatio quævis inter Abscissas duarum Curvarum, & inde per Prop. I. quærat relatio fluxionum Abscissarum, & ponantur Ordinatz reciproce proportionales fluxionibus, inveniri possunt innumeræ Curvæ quarum Areæ sibi mutuo æquales erunt.

COROL. II.

Si enim Curva omnis cujus hæc est Ordinata $z^{\theta-1} \times e + fz' + gz'' + \&c.$, assumendo quantitatem quamvis pro r , & ponendo $\frac{r}{z} = s$, & $z' = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{r^{\theta-1}}{z^{\theta-1}} \times e + f/r' + g/r'' + \&c.$

COROL.

COROL. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata est

$z^{b-1} \times \overline{a + bz^2 + cz^{2a} + \&c. \times e + fz^2 + gx^{2a} + \&c.}]^h$, assumendo quantitatem quamvis pro z & ponendo $\frac{z}{a} = s$, & $z^2 = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{b}{a} x^{\frac{b-a}{2}} \times \overline{a + bx^2 + cx^{2a} + \&c. \times e + fx^2 + gx^{2a} + \&c.}]^h$

COROL. IV.

Et Curva omnis cujus Ordinata est

$z^{b-1} \times \overline{a + bz^2 + cz^{2a} + \&c. \times e + fz^2 + gx^{2a} + \&c.}]^h \times \overline{k + lz^2 + mx^{2a} + \&c.}]^m$, assumendo quantitatem quamvis pro z , & ponendo $\frac{z}{a} = s$, & $z^2 = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{b}{a} x^{\frac{b-a}{2}} \times \overline{a + bx^2 + cx^{2a} + \&c. \times e + fx^2 + gx^{2a} + \&c.}]^h \times \overline{k + lx^2 + mx^{2a} + \&c.}]^m$

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata est

$z^{b-1} \times \overline{e + fz^2 + gx^{2a} + \&c.}]^h$, ponendo $\frac{z}{a} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\frac{b}{2}+1}} \times \overline{e + fx^{-2} + gx^{-2a} + \&c.}]^h$ id est $\frac{1}{x^{\frac{b}{2}+1+2a}} \times \overline{f + ex^2}]^h$ si duo sunt nomina in vinculo radices, vel $\frac{1}{x^{\frac{b}{2}+1+2a}} \times \overline{g + fx^2 + ex^{2a}]}^h$ si tria sunt nomina; & sic deinceps.

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata est

$z^{b-1} \times \overline{e + fz^2 + gx^{2a} + \&c.}]^h \times \overline{k + lz^2 + mx^{2a} + \&c.}]^m$, ponendo $\frac{z}{a} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est

$\frac{1}{x^{\frac{b}{2}+1}} \times \overline{e + fx^{-2} + gx^{-2a} + \&c.}]^h \times \overline{k + lx^{-2} + mx^{-2a} + \&c.}]^m$

id est $\frac{1}{x^{\frac{b}{2}+1+2a+2a\mu}} \times \overline{f + ex^2}]^h \times \overline{l + kx^2}]^m$ si bina sunt nomina in vinculis radicibus, vel $\frac{1}{x^{\frac{b}{2}+1+2a\lambda+2a\mu}} \times \overline{g + fx^2 + ex^{2a}]}^h \times \overline{l + kx^2}]^m$ si tria sunt nomina in vinculo radices prioris ac duo in vinculo posterioris: & sic in aliis.

P

Et

Et nota quod Areae duæ æquales in novissimis hisce duobus Corollariis jacent ad contrarias partes Ordinarum. Si Area in alterutra Curva adjacet Abscissæ, Area huic æqualis in altera Curva adjacet Abscissæ productæ.

COROL. VII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abscissam z definiatur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$y^{\alpha} \times e + fy^{\alpha} z^{\beta} + gy^{2\alpha} z^{2\beta} + hy^{3\alpha} z^{3\beta} + \&c. = z^{\theta} \times k + ly^{\alpha} z^{\beta} + my^{2\alpha} z^{2\beta} + \&c.$
 hæc Figura assumendo $s = \frac{z-\beta}{\alpha}$, $x = \frac{1}{s} z^{\alpha}$, & $\lambda = \frac{z-\beta}{\alpha s - \beta}$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Abscissa x , ex data Ordinata v , determinatur per æquationem non affectam $\frac{1}{s} v^{\alpha} \times e + fv^{\alpha} + gv^{2\alpha} + \&c. |^{\lambda} \times k + lv^{\alpha} + mv^{2\alpha} + \&c. |^{-\lambda} = x$.

COROL. VIII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abscissam z definitur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^{\alpha} \times e + fy^{\alpha} z^{\beta} + gy^{2\alpha} z^{2\beta} + \&c. = z^{\theta} \times k + ly^{\alpha} z^{\beta} + my^{2\alpha} z^{2\beta} + \&c. \\ + z^{\gamma} \times p + qy^{\alpha} z^{\beta} + ry^{2\alpha} z^{2\beta} + \&c.$$

hæc Figura assumendo $s = \frac{z-\beta}{\alpha}$, $x = \frac{1}{s} z^{\alpha}$, $\mu = \frac{z-\beta}{s-\beta}$, & $v = \frac{z-\beta}{s-\beta}$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Abscissa x ex data Ordinata v determinatur per æquationem minus affectam $v^{\alpha} \times e + fv^{\alpha} + gv^{2\alpha} + \&c. = s^{\theta} x^{\alpha} \times k + lv^{\alpha} + mv^{2\alpha} + \&c. \\ + s^{\gamma} \times p + qv^{\alpha} + rv^{2\alpha} + \&c.$

COROL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata est

$\alpha z^{\theta-1} \times e + r + n f z^{\beta} + r + 2n g z^{2\beta} + \&c. \times e + f z^{\beta} + g z^{2\beta} + \&c. |^{\lambda-1}$ in $a + b \times e z^{\beta} + f z^{2\beta} + g z^{3\beta} + \&c. |^{\alpha}$, si fit $\theta = \lambda \alpha$, & assumantur $x = e z^{\beta} + f z^{2\beta} + g z^{3\beta} + \&c. |^{\alpha}$, $\sigma = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, & $\delta = \frac{\lambda-\alpha}{\alpha-1}$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $x^{\delta} \times a + b x^{\sigma} |^{\alpha}$. Et nota quod Ordinata prior in hoc Corollario evadit simplicior ponendo $\lambda = 1$, vel ponendo $\tau = 1$, & efficiendo ut radix dignitatis extrahi possit cujus index est α , vel etiam ponendo $\alpha = -1$, & $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \tau$, ut alios casus præteream.

COROL.

COROL. X.

Pro $cx^r + fz^{12} + gz^{122} + \&c.$ $vcz^{r-1} + r + sfz^{r12-1} + r + 2sgz^{r122-1} + \&c.$
 $k + lx + mx^{12} + \&c.$ et $nlz^{r-1} + 2nmz^{r12-1} + \&c.$ scribantur R, r, S & s
 respective, & Curva omnis cujus Ordinata est $\pi S^r + \phi R^s \times R^{1-1} S^{u-1}$
 $\times aS^v + bR^w$, si fit $\frac{r-1}{\lambda} = \frac{v}{\tau} = \frac{s}{\mu} = e, \frac{\lambda-v}{\tau} = \phi$, & $R^s S^e = x$,
 migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $x^3 \times a + b\pi^v$. Et nota
 quod Ordinata prior evadit simplicior, ponendo unitates pro τ, v , & λ vel
 μ , & faciendo ut radix dignitatis extrahi possit cujus index est ω , vel po-
 nendo $\omega = -1$ vel $\mu = 0$.

PROP. X. PROB. III.

*Invenire Figuras simplicissimas cum quibus Curva quæ-
 vis Geometrice comparari potest, cujus Ordinatum appli-
 cata y per æquationem non affectam ex data Abscissa z
 determinatur.*

C A S. I.

Sit Ordinata ax^{e-1} , & Area erit $\frac{1}{e}ax^e$, ut ex Prop. 5. ponendo
 $b = 0 = c = d = f = g = h$, & $e = 1$, facile colligitur.

C A S. II.

Sit Ordinata $ax^{3-2} \times e + fz^r + gz^{12} + \&c.$, et si Curva cum Figuris
 rectilineis Geometrice comparari potest, quadrabitur per Prop. 5. ponendo
 $b = 0 = c = d$. Sin minus convertetur in aliam Curvam sibi æqualem
 cujus Ordinata est $\frac{e-2}{2} x^{\frac{e-2}{2}} \times e + fx + gx^2 + \&c.$ per Corol. 2, Prop. 9.
 Deinde si de dignitatum indicibus $\frac{e-2}{2}$ & $\lambda - 1$ per Prop. 7. rejiciantur
 unitates

unitates donec dignitates illæ fiant quam minimæ, devenietur ad Figuras simplicissimas quæ hac ratione colligi possunt. Dein harum unaquæque per Corol. 5, Prop. 9. dat aliam quæ nonnunquam simplicior est. Et ex his per Prop. 3. & Corol. 9, & 10, Prop. 9. inter se collatis, Figuræ adhuc simpliciores quandoque prodeunt. Denique ex Figuris simplicissimis assumptis facto regressu computabitur Area quæsitæ.

C A S. III.

Sit Ordinata $z^{h-1} \times \overline{a + bz^2 + cz^3 + \&c.} \times \overline{e + fz^2 + gx^3 + \&c.}^{h-1}$, & hæc Figura si quadrari potest, quadrabitur per Prop. 5. Sin minus, distinguenda est Ordinata in partes $z^{h-1} \times \overline{a + e + fz^2 + gx^3 + \&c.}^{h-1}$, $z^{h-1} \times \overline{bz^2 \times e + fz^2 + gx^3 + \&c.}^{h-1}$, &c. et per Caf. 2. inveniendæ sunt Figuræ simplicissimæ cum quibus Figuræ partibus illis respondentibus comparari possunt.

Nam Areæ figurarum partibus illis respondentium sub signis suis + & — conjunctæ component Aream totam quæsitam.

C A S. IV.

Sit Ordinata $z^{h-1} \times \overline{a + bz^2 + cz^3 + \&c.} \times \overline{e + fz^2 + gx^3 + \&c.}^{h-1}$ in $\overline{k + lz^2 + mx^3 + \&c.}^{h-1}$; et si Curva quadrari potest, quadrabitur per Prop. 6. Sin minus, convertetur in simpliciozem per Corol. 4, Prop. 9. ac inde comparabitur cum Figuris simplicissimis per Prop. 8. et Corol. 6, 9 & 10, Prop 9. ut fit in Casu 2 & 3.

C A S. V.

Si Ordinata ex variis partibus constat, partes singulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ sunt, & Curvæ illæ quotquot quadrari possunt, figillatim quadrandæ sunt, earumque Ordinatæ de Ordinata tota demendæ.

Dein

Dein Curva quam Ordinata pars residua designat seorsim (ut in Casu 2, 3 & 4.) cum Figuris simplicissimis comparanda est cum quibus comparari potest. Et summa Arearum omnium pro Area Curvæ propolitæ habenda est.

COROL. I.

Hinc etiam Curva omnis cujus Ordinata est radix quadratica affecta æquationis suæ, cum Figuris simplicissimis seu rectilineis seu curvilineis comparari potest. Nam radix illa ex duabus partibus semper constat quæ seorsim spectatæ non sunt æquationum radices affectæ.

Proponatur æquatio $ay^2 + x^2y = 2axy + 2xz^2y - z^4$, & extracta radix erit $y = \frac{a^2 + x^2 + ay\sqrt{a^2 + 2xz^2} - z^4}{aa + xx}$, cujus pars rationalis $\frac{a^2 + x^2}{aa + xx}$ & pars irrationalis $\frac{ay\sqrt{a^2 + 2xz^2} - z^4}{aa + xx}$ sunt Ordinatæ curvarum quæ per hanc Propositionem vel quadrari possunt vel cum Figuris simplicissimis comparari cum quibus collationem Geometricam admittunt.

COROL. II.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 7. Prop. 9. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis cum quibus comparari potest. Et hac ratione Curva omnis quadratur cujus æquatio est trium terminorum. Nam æquatio illa si affecta sit, transmutatur in non affectam per Corol. 7. Prop. 9. ac deinde per Corol. 2. & 5. Prop. 9. in simplicissimam migrando, dat vel quadraturam Figuræ si quadrari potest, vel Curvam simplicissimam quacum comparatur.

COROL. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 8. Prop. 9. in æquationem quadraticam affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem & hujus Corol. 1. si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis cum quibus collationem Geometricam admittit.

Q

SCHO.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ sunt Figuræ, ad Regulas hæcæ generales semper recurrere nimis molestum esset: præstat Figuras quæ simpliciores sunt & magis usui esse possunt semel quadrare & quadraturas in Tabulam referre, deinde Tabulam consulere quoties ejusmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis sunt Tabulæ duæ sequentes, in quibus x denotat Abscissam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream Curvæ quadrandæ, & d, e, f, g, h, i sunt quantitates datæ cum signis suis $+$ & $-$.

TABULA		
CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ QUADRARI POSSUNT		
CURVARUM FORMÆ		CURVARUM AREÆ
I	$dx^{n-1} = y$	$\frac{d}{n} x^n = t$
II	$\frac{dx^{n-1}}{x^2 + \frac{1}{2}y^{2n} + f^{2n}} = y$	$\frac{dx^n}{n x^2 + \frac{1}{2}y^{2n} + f^{2n}} = t. \text{vel } \frac{d}{n y^2 + \frac{1}{2}y^{2n} + f^{2n}} = t$
III	$dx^{n-1} \sqrt{e + f x^n} = y$	$\frac{d}{2f} R^2 = t. \text{ existente } R = \sqrt{e + f x^n}$
	$dx^{2n-1} \sqrt{e + f x^n} = y$	$\frac{-\frac{d}{2} + \frac{e f x^n}{2 f y^n}}{2 f y^n} dR' = t$
	$dx^{3n-1} \sqrt{e + f x^n} = y$	$\frac{\frac{d}{6} + \frac{-2 e f x^n + 3 f^2 x^{2n}}{3 f y^n}}{2 f y^n} dR' = t$
	$dx^{4n-1} \sqrt{e + f x^n} = y$	$\frac{-\frac{d}{2} R' + \frac{2 e f x^n + 3 f^2 x^{2n} + 12 f^2 x^{3n}}{2 f y^n}}{2 f y^n} dR' = t$
IV	$\frac{dx^{n-1}}{\sqrt{e + f x^n}} = y$	$\frac{d}{y} R = t$
	$\frac{dx^{2n-1}}{\sqrt{e + f x^n}} = y$	$\frac{-\frac{d}{2} + \frac{f x^n}{2 y^n}}{2 y^n} dR = t$
	$\frac{dx^{3n-1}}{\sqrt{e + f x^n}} = y$	$\frac{\frac{d}{6} + \frac{-2 e f x^n + 3 f^2 x^{2n}}{3 y^n}}{2 y^n} dR = t$
	$\frac{dx^{4n-1}}{\sqrt{e + f x^n}} = y$	$\frac{-\frac{d}{2} R + \frac{2 e f x^n + 3 f^2 x^{2n} + 12 f^2 x^{3n}}{2 y^n}}{2 y^n} dR = t$

In Tabulis hifce, series Curvarum cujufque formæ utrinque in infinitum continuari poteft. Scilicet in Tabula prima, in numeratoribus Arearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum (2, -4, 16, -96, 868, &c.) generantur multiplicando numeros -2, -4, -6, -8, -10, &c. in fe continuo, & fubfequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipfos gradatim, in Formâ quidem tertiâ, per $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3},$ &c. in quarta vero per $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{5}{2},$ &c. Et Denominatorum coefficientes 3, 15, 105, &c. prodeunt multiplicando numeros 1, 3, 5, 7, 9, &c. in fe continue.

In fecunda vero Tabula, series Curvarum formæ primæ, secundæ, quintæ, sextæ, nonæ, & decimæ ope folius divifionis, & formæ reliquæ ope Propositionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ series mutando fignum numeri * variari folent. Sic enim e. g. Curva $\frac{d}{2}\sqrt{x+y^2} = y$, evadit $\frac{d}{x^2+1}\sqrt{x+y^2} = y$.

PROP. XI. THEOR. VIII.

Sit ADIC Curva quævis Abfciffam habens AB = x, & Ordinatum BD = y, & fit AEKC Curva alia cujus Ordinata BE æqualis eft prioris areæ ADB ad unitatem applicatæ, & AFLC Curva tertia cujus Ordinata BF æqualis eft secundæ Areæ AEB ad unitatem applicatæ, & AGMC Curva quarta cujus Ordinata BG æqualis eft tertiæ areæ AFB ad unitatem applicatæ, & AHNC Curva quinta cujus Ordinata BH æqualis eft quartæ Areæ AGB ad unitatem applicatæ, & fic deinceps in infinitum. Et funto A, B, C, D, E, &c. Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, zy, z'y, z'y, z'y, &c. et Abfciffam communem x.

Detur Abfciffa quævis AC = t, fitque BC = t - x = s, & funto P, Q, R, S, T Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, xy, x'y, x'y, x'y &c. et Abfciffam communem x.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abfciffam totam datam AC, nec non ad Ordinatum pofitione datam & infinite productam CI:

Et erit Arearum fub initio pofitarum

Prima ADIC = A = P,

Secunda AEKC = tA - B = Q,

Tertia AFLC = $\frac{t^2 A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2} R$.

Quarta AGMC = $\frac{t^3 A - 3t^2 B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6} S$.

Quinta AHNC = $\frac{t^4 A - 4t^3 B + 6t^2 C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24} T$.

COROL.



COROL.

Unde si Curvæ quarum Ordinatz sunt y , zy , z^2y , z^3y , &c. vel y , xy , x^2y , x^3y , &c. quadrari possunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AGMC, &c. et habebuntur Ordinatz BE, BF, BG, BH, Areis Curvarum proportionales.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus supra. Hæ Fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium.

Ut si z fit quantitas fluens & fluendo evadat $z + o$, deinde resolvatur in seriem convergentem $z^m + moz^{m-1} + \frac{m-1}{2}ooz^{m-2} + \frac{m-1-2m+2^2}{6}o^2z^{m-3} + \&c.$ terminus primus hujus seriei z^m erit quantitas illa fluens, secundus moz^{m-1} erit ejus incrementum primum seu differentia prima cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima, tertius $\frac{m-1}{2}ooz^{m-2}$ erit ejus incrementum secundum seu differentia secunda cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda, quartus $\frac{m-1-2m+2^2}{6}o^2z^{m-3}$ erit ejus incrementum tertium seu differentia tertia cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est, & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c.

Ut si Ordinata BE ($= \frac{ADB}{1}$) fit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF ($= \frac{AEB}{1}$) fit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD.

Si BH ($= \frac{AGB}{1}$) fit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, secunda, tertia & quarta, ut Ordinatz BG, BF, BE, BD respective.

Et hinc in æquationibus quæ quantitates tantum duas incognitas involvunt, quarum una est quantitas uniformiter fluens & altera est Fluxio quolibet quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa altera per quadraturam Curvarum. Exponatur enim Fluxio ejus per Ordinatam BD, & si hæc fit Fluxio prima, quærat Area ADB = BE \times 1, si Fluxio secunda, quærat Area AEB = BF \times 1, si Fluxio tertia, quærat Area AFB = BG \times 1, &c. et Area inventa erit exponens fluentis quæstia.

Sed

Sed & in æquationibus quæ fluentem & ejus fluxionem primam sine altera fluente, vel duas ejusdem fluentis fluxiones, primam & secundam, vel secundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. sine alterutra fluente involvunt: inveniri possunt fluentes per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $av\dot{v} = av + vv$, existente $v = BE$, $\dot{v} = BD$, $z = AB$, & $\dot{z} = 1$, & æquatio illa complendo dimensiones Fluxionum, evadet $av\dot{v} = av\dot{z} + vv\dot{z}$, seu $\frac{av\dot{v}}{av + vv} = \dot{z}$.

Jam fluat v uniformiter, & fit ejus Fluxio $\dot{v} = 1$,

& erit $\frac{av}{av + vv} = \dot{z}$, & quadrando Curvam cujus Ordinata est $\frac{av}{av + vv}$ & Abscissa v , habebitur fluens z .

Adhæc fit æquatio $av\dot{v} = av + v\dot{v}$, existente $v = BF$, $\dot{v} = BE$, $\ddot{v} = BD$, & $z = AB$, & per relationem

inter \ddot{v} & \dot{v} seu BD & BE invenietur relatio inter AB & BE , ut in exemplo superiore. Deinde per hanc relationem invenietur relatio inter AB & BF quadrando Curvam AEB .

Æquationes quæ tres incognitas quantitates involvunt aliquando reduci possunt ad æquationes quæ duas tantum involvunt, & in his casibus fluentes invenientur ex fluxionibus ut supra. Sit æquatio $a - bx^m = cxy\dot{y}$, + dy^ny , ponatur $y\dot{y} = \dot{v}$, & erit $a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$. Hæc æquatio quadrando Curvam cujus Abscissa est x & Ordinata \dot{v} dat Aream v ; & æquatio altera $y\dot{y} = \dot{v}$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1}y^{n+1} = v$: Unde habetur fluens y .

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantum involvunt, reduci non possunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $ax^m + bx^p = rex^{r-1}y^s + sex^{r'}y^{s-1} - fyy$, existente $\dot{x} = 1$; Et pars posterior $rex^{r-1}y^s + sex^{r'}y^{s-1} - fyy$, regrediendo ad fluentes, fit $exy^s - \frac{f}{n+1}y^{n+1}$, quæ proinde est ut Area Curvæ cujus Abscissa est x & Ordinata $\frac{ax^m + bx^p}{x^m + y^p}$, & inde datur fluens y .

R.

Sit



Sit æquatio $x \sqrt{ax^m + bx^n} = \frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy}}$, Et fluens cujus Fluxio est $x \sqrt{ax^m + bx^n}$ erit ut Area Curvæ cujus Abscissa est x & Ordinata est $\sqrt{ax^m + bx^n}$. Item fluens cujus Fluxio est $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy}}$ erit ut Area Curvæ cujus Abscissa est y & Ordinata $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy}}$, id est (per Casum 1. Formæ quartæ Tab. I.) ut Area $\frac{2d}{f} \sqrt{e+fy}$. Pono ergo $\frac{2d}{f} \sqrt{e+fy}$ æqualem Areæ Curvæ cujus Abscissa est x & Ordinata $\sqrt{ax^m + bx^n}$, & habebitur fluens y .

Et nota quod fluens omnis, quæ ex Fluxione prima colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis non fluente. Quæ ex Fluxione secunda colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis cujus Fluxio secunda nulla est. Quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri potest vel minui quantitate quavis cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate Conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum Fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, Conclusio recte se habet: sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum Fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquentur. Nam & fluens prohibitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem Fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

Et his principiis via ad majora sternitur.



ENUMERATIO
LINEARUM
TERTII ORDINIS.





ENUMERATIO

LINEARUM

TERTII ORDINIS.

I. *Linearum Ordines.*



Inæz Geometricæ secundum numerum dimensionum æquationis qua relatio inter Ordinatæ & Abscissas definitur, vel (quod perinde est) secundum numerum punctorum in quibus a linea recta secari possunt, optime distinguuntur in Ordines. Quæ ratione linea primi Ordinis erit Recta sola, ex secundi sive quadratici Ordinis erunt sectiones Conicæ & Circulus, & ex tertii sive cubici Ordinis Parabola Cubicæ, Parabola *Neiliana*, Cissois veterum, & reliquæ quas hic enumerare suscepimus. Curva autem primi Generis, (siquidem recta inter Curvas non est numeranda) eadem est cum Linea secundi Ordinis, & Curva secundi Generis eadem cum Linea Ordinis tertii. Et Linea Ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

S

II. *Præ.*

II. *Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis superiorum Generum.*

Sectionum Conicarum proprietates præcipuæ a Geometris passim traduntur. Et conformes sunt proprietates Curvarum secundi Generis, & reliquarum, ut ex sequenti proprietatum præcipuarum enumeratione constabit.

1. *De Curvarum secundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ & ad Conicam sectionem utrinque terminatæ ducantur, recta duas earum bifecans bifecabit alias omnes, ideoque dicitur *Diameter* figuræ & rectæ bifectæ dicuntur *Ordinatis applicatæ* ad *Diametrum*, & concursus omnium *Diametrorum* est *Centrum* figuræ, & intersectio Curvæ & diametri *Vertex* nominatur, & diameter illa *Axis* est cui *Ordinatis applicatæ* insistant ad angulos rectos. Et ad eundem modum in *Curvis* secundi Generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis : recta quæ ita fecat has parallelas ut summa duarum partium ex uno secantis latere ad Curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex altero latere ad Curvam terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas curvæque in tribus punctis occurrentes rectas, hoc est, ita ut summa partium duarum ex uno ipsius latere semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes quæ hinc inde æquantur, *Ordinatis applicatas*, & rectam secantem cui *Ordinatis applicantur Diametrum*, & intersectionem diametri & Curvæ *Verticem*, & concursum duarum *Diametrorum Centrum* nominare licet. Diameter autem ad *Ordinatas* rectangula si modo aliqua sit, etiam *Axis* dici potest, & ubi omnes *Diametri* in eodem puncto concurrunt, istud erit *Centrum generale*.

2. *De Asymptotis & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotas*, ea secundi tres, ea tertiæ quatuor & non plures habere potest, & sic in reliquis. Et quemadmodum partes linearum cujuscunque rectæ inter *Hyperbolam Conicam* & duas ejus *Asymptotas* sunt hinc inde æquales : sic in *Hyperbolis* secundi Generis si ducatur

ducatur recta quævis secans tam Curvam quam tres ejus Asymptotos in tribus punctis, summa duarum partium istius rectæ quæ a duobus quibuscumque Asymptotis in eandem plagam ad duo puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ quæ a tertia Asymptoto in plagam contrariam ad tertium. Curvæ punctum extenditur.

3. De Lateribus rectis & transversis.

Et quemadmodum in Conicis sectionibus non Parabolicis quadratum Ordinatum applicatur, hoc est, rectangulum Ordinarum quæ ad contrarias partes Diametri ducuntur, est ad rectangulum partium Diametri quæ ad Vertices Ellipseos vel Hyperbolæ terminantur, ut data quadam linea quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus transversum*: sic in Curvis non Parabolicis secundi Generis parallelepipedum sub tribus Ordinatis applicatis est ad parallelepipedum sub partibus Diametri ad Ordinas & tres Vertices figuræ abscissis, in ratione quadam data: in qua ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes diametri inter vertices figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Latera recta* figuræ, & illæ partes Diametri inter Vertices *Latera transversa*. Et sicut in Parabola Conica quæ ad unam & eandem diametrum unicum tantum habet Verticem, rectangulum sub Ordinatis æquatur rectangulo sub parte Diametri quæ ad Ordinas & Verticem abscinditur & recta quadam data quæ *Latus rectum* dicitur: sic in Curvis secundi Generis quæ non nisi duos habent Vertices ad eandem Diametrum, parallelepipedum sub Ordinatis tribus æquatur parallelepipedo sub duabus partibus Diametri ad Ordinas & Vertices illos duos abscissis, & recta quadam data quæ proinde *Latus rectum* dici potest.

4. De Ratione contentorum sub Parallelarum segmentis.

Denique sicut in Conicis sectionibus ubi duæ parallelæ ad Curvam utrinque terminatæ secantur a duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima a tertia, & secunda a quarta, rectangulum partium primæ est ad rectangulum partium tertiæ ut rectangulum partium secundæ ad rectangulum partium quartæ: sic ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi Generis, singulæ in tribus punctis, parallelepipedum partium primæ rectæ erit ad parallelepipedum partium tertiæ, ut parallelepipedum partium secundæ ad parallelepipedum partium quartæ.

5. De

5. De Cruribus Hyperbolicis & Parabolicis & eorum plagis.

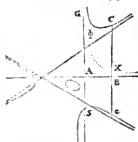
Curvarum secundi & superiorum Generum æque atque primi crura omnia in infinitum progredientia vel *Hyperbolici* sunt generis vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco quod ad Asymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicam* quod Asymptoto delituitur. Hæc crura ex Tangentibus optime dignoscuntur. Nam si punctum contactus in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Asymptoto coincider, & Tangens cruris Parabolici in infinitum receder, evanescet & nullibi reperietur. Invenitur igitur Asymptotos cruris cujusvis quærendo Tangentem cruris illius ad punctum infinite distans. Plaga autem cruris inniti invenitur quærendo positionem rectæ cujusvis quæ Tangenti parallela est ubi punctum contactus in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

III. Reductio Curvarum omnium Generis Secundi ad æquationum casus quatuor.

Lineæ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, septimi & imparis cujusque duo habent ad minimum crura in infinitum versus plagas oppositas progredientia. Et lineæ omnes tertii Ordinis duo habent ejusmodi crura in plagas oppositas progredientia in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabola *Cartesiana*) tendunt.

C A S. I.

Si crura illa sint Hyperbolici generis, sit GAS eorum Asymptotos, & huic



parallela agatur recta quævis CBc ad Curvam utrinque (si fieri potest) terminata, eademque bisecetur in puncto X, & locus puncti illius X erit Hyperbola Conica (puta X_0) cujus una Asymptotos est AG. Sit ejus altera Asymptotos AB, & æquatio qua relatio inter Ordinariam BC & Abscissam AB definitur, si AB dicatur x , & BC y , semper induet hanc formam $xy + cy = ax^2 + bxx + cx + d$. Ubi termini, e , a , b , c , d , designant quantitates datas signis suis + & - affectas, quarum quælibet deesse possunt modo

ex earum defectu figura in sectionem Conicam non verratur. Potest autem Hyperbola illa Conica cum Asymptotis suis coincidere, id est punctum X in recta AB locari: & tunc terminus + c deest.

CAS.

C A S. II.

At si recta illa CBc non potest utrinque ad Curvam terminari, sed Curvæ in unico tantum puncto occurrit : age quamvis positione datam rectam AB Asymptoto AS occurrentem in A, ut & aliam quamvis BC Asymptoto illi parallelam Curvæque occurrentem in puncto C, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

$$xy = ax^2 + bx^2 + cx + d.$$



C A S. III.

Quod si crura illa opposita Parabolici sint generis, recta CBc ad Curvam utrinque, si fieri potest, terminata in plagam crurum ducatur & bifecetur in B, & locus puncti B erit Linea recta. Sit ista AB, terminata ad datum quodvis punctum A, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

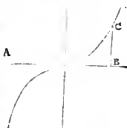
$$yy = ax^2 + bx^2 + cx + d.$$



C A S. IV.

At vero si recta illa CBc in unico tantum puncto occurrat Curvæ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non possit : sit punctum illud C, & incidat recta illa ad punctum B in rectam quamvis aliam positione datam & ad datum quodvis punctum A terminatam AB : & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AC definitur, semper induet hanc formam,

$$y = ax^2 + bx^2 + cx + d.$$



T

No.

Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum casuum, Hyperbolam vocabimus, *Inscriptam*, quæ tota jacet in Asymptoton angulo ad instar Hyperbolæ conicæ; *Circumscriptam*, quæ Asymptotos secat & partes Abscissas in sinu suo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inscribitur & altero circumscribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate sua seinvicem respiciunt & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate sua seinvicem respiciunt & in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa sunt & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo & cruribus divergentibus ad Asymptoton applicatur; *Angineam*, quæ flexibus contrariis Asymptoton secat & utrinque in crura contraria producit; *Cruciformem*, quæ conjugatam decussat; *Nodatam*, quæ seipsam decussat in orbem redeundo; *Cuspidatam*, cujus partes duæ in angulo contactus concurrunt & ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet Ovalem infinite parvam id est punctum; & *Puram*, quæ per impossibilitatem duarum radicum Ovali, Nodo, Cuspide & Puncto conjugato privatur. Eodem sensu Parabolam quoque *convergentem*, *divergentem*, *cruribus contrariis præditam*, *cruciformem*, *nodatam*, *cuspidatam*, *punctatam* & *puram* nominabimus.

In casu primo si terminus ax^2 affirmativus est, Figura erit Hyperbola triplex cum sex cruribus Hyperbolicis quæ juxta tres Asymptotos quarum nullæ sunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Asymptoti si terminus bx^2 non deest, se mutuo secabunt in tribus punctis triangulum (Dd Δ) inter se continentes, si terminus bx^2 deest, convergent omnes ad idem punctum. In priori casu cape $AD = \frac{-b}{2a}$, & $Ad = A\Delta = \frac{b}{2va}$, ac junge Dd, D Δ , & erunt Ad, Dd, D Δ tres Asymptoti. In posteriori duc Ordinatam quamvis BC, Ordinatarum principali AG parallelam, & in ea utrinque producta cape hinc inde BF & Bf sibi mutuo æquales & in ea ratione ad AB quam habet Va ad 1, jungeque AF, Af & erunt AG, AF, Af tres Asymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum Hyperbolicorum Sectiones Conicæ superat.

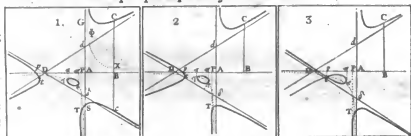
In Hyperbola omni Redundante, si neque terminus cy desit, neque sit $bb - 4ac$ æquale $\pm ac/va$, Curva nullam habebit Diametrum, si eorum alterutrum accidit Curva habebit unicam Diametrum, & tres si utrumque. Diameter autem semper transit per intersectionem duarum Asymptoton, & bifecat rectas omnes quæ ad Asymptotos illas utrinque terminantur & parallelæ sunt Asymptoto tertiæ. Estque Abscissa AB diameter Figuræ quoribus terminus cy deest. *Diametrum* vero absolute dictam hic & in sequentibus in vulgari significato usurpo, nempe pro Abscissa quæ passim habet Ordinaras binas æquales ad idem punctum hinc inde insistentes.

IV. Enum.

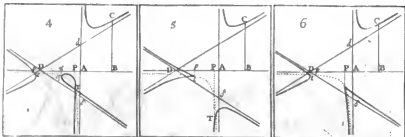
IV. Enumeratio Curvarum.

1. De Hyperbolis novem redundantibus quæ diametro destituuntur & tres habent Asymptotos triangulum capientes.

Si Hyperbola redundans nullam habet diametrum, quarantur *Æquationis* hujus $ax^3 + bx^2 + cx + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ radices quatuor seu valores ipsius x . Ex sunt AP, A π , A τ , Ap. Erigantur Ordinata PT, $\pi\tau$, $\tau\lambda$, pt, & hæc tangunt Curvam in punctis totidem T, τ , λ , t, & tangendo dabunt limites Curvæ per quos Species ejus innotescet.



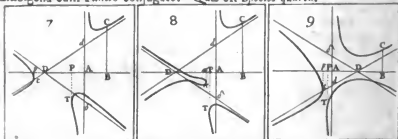
Nam si radices omnes AP, A π , Ap, (Fig. 1, 2.) sunt reales, ejusdem signi & inæquales, Curva constat ex tribus Hyperbolis, (inscripta, circumscripta & ambigena) cum Ovali. Hyperbolarum una jacet versus D, altera versus d, tertia versus A, & Ovalis semper jacet intra Triangulum DdA, atque etiam inter medios limites λ & τ , in quibus utique tangitur ab Ordinatis $\pi\lambda$ & $\pi\tau$. Et hæc est *Species prima*.



Si e radibus duæ maximæ A π , Ap, (Fig. 3.) vel duæ minimæ AP, A π (Fig. 4.) æquantur inter se, & ejusdem sunt signi cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola circumscripta sibi invicem junguntur coeuntibus earum punctis contractus λ & t vel T & τ , & crura Hyperbolæ sese decessando in Ovalem continuantur, figuram *Notatam* efficientia. Quæ *Species est secunda*. Si

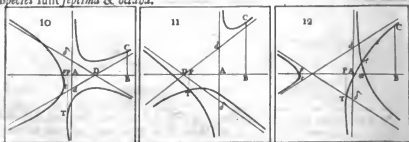
Si e radicibus tres maximæ Ap , $A\pi$, $A\sigma$, (Fig. 5.) vel tres minimæ $A\pi$, $A\sigma$, AP (Fig. 6.) æquantur inter se, Nodus in *Cuspide* acutissimum convertitur. Nam crura duo Hyperbolæ circumscriptæ ibi in angulo contactus concurrent & non ultra producentur. Et hæc est *Species tertia*.

Si e radicibus duæ mediæ $A\pi$ & $A\sigma$ (Fig. 7.) æquantur inter se, puncta contactus τ & γ coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in punctum evanuit, & constat figura ex tribus Hyperbolis, inscripta, circumscripta & ambigua cum *Puncto* conjugato. Quæ est *Species quarta*.



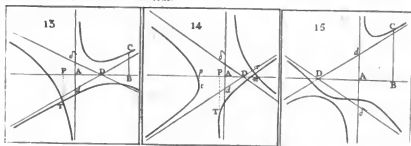
Si duæ ex radicibus sunt impossibiles & reliquæ duæ inæquales & ejusdem signi (nam signa contraria habere nequeunt,) *Pura* habebuntur Hyperbolæ tres sine Ovali vel Nodo vel *Cuspide* vel *Puncto* conjugato, & hæc Hyperbolæ vel ad latera trianguli ab Asymptotis comprehensi vel ad angulos ejus jacebunt; & perinde *Speciem* vel *quintam* (Fig. 7. 8.) vel *sextam* (Fig. 9, 10.) constituent.

Si e radicibus duæ sunt æquales & alteræ duæ vel impossibiles sunt (Fig. 11. 13.) vel reales (Fig. 12. 14.) cum signis quæ a signis æqualium radicum diversa sunt, figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis seinvicem decussabunt idque vel ad verticem trianguli ab Asymptotis comprehensi (Fig. 13, 14.) vel ad ejus basem (Fig. 11, 12.) Quæ duæ *Species* sunt *septima* & *octava*.



Si denique radices omnes sunt impossibiles (Fig. 15.) vel si omnes sunt reales & inæquales (Fig. 16.) & earum duæ sunt affirmativæ & alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad angulos oppositos duarum Asymptoton cum Hyperbola *Anginea* circa Asymptoton tertiam. Quæ *Species* est *nona*. Et

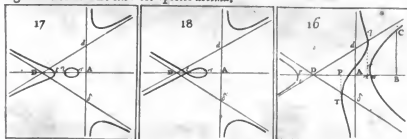
Et hi sunt omnes radicum casus possibiles. Nam si duæ radices sunt æquales inter se, & alix duæ sunt etiam inter se æquales, Figura evadet Sectio Conica cum Linea recta.



2. De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantum Diametrum habentibus.

Si Hyperbola redundans habet unicam tantum Diametrum, fit ejus Diameter Abscissa AB, & æquationis hujus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ quare tres radices seu valores x .

Si radices illæ sunt omnes reales & ejusdem signi, Figura constabit ex Ovali intra triangulum Ddδ (Fig. 17.) jacente & tribus Hyperbolis ad angulos ejus, nempe Circumscripta ad angulum D & Inscriptis duabus ad angulos δ & δ. Et hæc est Species decima.



Si radices duæ majores sunt æquales & tertia ejusdem signi, crura Hyperbolæ jacentis versus D (Fig. 18.) sese decussabunt in forma Nodi propter contactum Ovalis. Quæ Species est undecima.

Si tres radices sunt æquales, Hyperbola ista fit Cuspidata sine Ovali, (Fig. 19.) Quæ Species est duodecima.

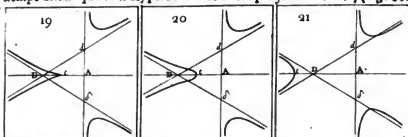
Si radices duæ minores sunt æquales & tertia ejusdem signi, Ovalis in Punctum evanuit, (Fig. 20.) Quæ Species est decima tertia.

In speciebus quatuor novissimis Hyperbola quæ jacet versus D, Asymptotos in sinu suo amplectitur, reliquæ duæ in sinu Asymptoton jacent.

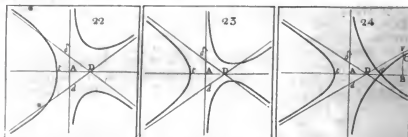
U

Si.

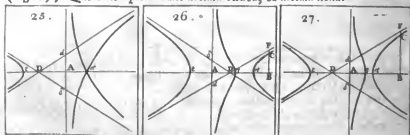
Si duæ ex radicibus sunt impossibiles habebuntur tres Hyperbolæ *Para* fine Ovali decussatione vel cuspid. Et hujus casus *Species* sunt quatuor : nempe *decima quarta* si Hyperbola Circumscripta jacet versus D, (Fig. 20.)



& *decima quinta* si Hyperbola Inscripta jacet versus D, (Fig. 21.) *decima sexta* si Hyperbola Circumscripta jacet sub basi $d\delta$ trianguli $Dd\delta$, (Fig. 22.) & *decima septima* (Fig. 23.) si Hyperbola inscripta jacet sub eadem basi.

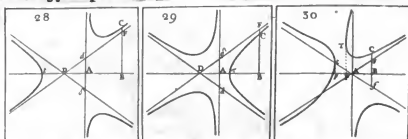


Si duæ radices sunt æquales & tertia signi diversi figura erit *Cruciformis*. Nempe duæ ex tribus Hyperbolis seinvicem decussabunt idque vel ad verticem trianguli ab Asymptotis comprehensi (Fig. 24.) vel ad ejus basem, (Fig. 25.) Quæ duæ *Species* sunt *decima octava*, & *decima nona*.



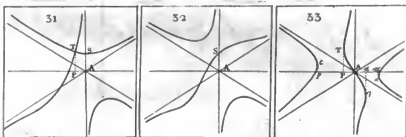
Si duæ radices sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi diversi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppositis angulis duarum Asymptoton cum
Con-

Concuboidali intermedia. *Concuboidalis* autem vel jacebit ad easdem partes Asymptoti suæ cum triangulo ab Asymptotis constituto, (Fig. 26.) vel ad partes contrarias, (Fig. 27.) Et hi duo casus constituunt *Speciem vigesimam & vigesimam primam.*



3. De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.

Hyperbola redundans quæ habet tres diametros, constat ex tribus Hyperbolis in sinibus Asymptoton jacentibus, idque vel ad angulos trianguli ab Asymptotis comprehensi (Fig. 28.) vel ad ejus latera (Fig. 29.) Casus prior dat *Speciem vigesimam secundam*, & posterior *Speciem vigesimam tertiam.*

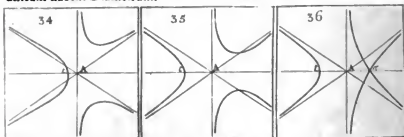


4. De Hyperbolis novem redundantibus cum Asymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.

Si tres Asymptoti in puncto communi se mutuo decussant, vertuntur species quinta & sexta in *vigesimam quartam*, (Fig. 30.) septima & octava in *vigesimam quintam*, (Fig. 31.) & nona in *vigesimam sextam* (Fig. 32.) ubi Anginea non transit per concursum Asymptoton, & in *vigesimam septimam* ubi transit per concursum illum, (Fig. 33.) quo casu termini *b* ac *d* defunt, & concursus Asymptoton est Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppositis æqualiter distans. Et hæc quatuor species diametrum non habent.

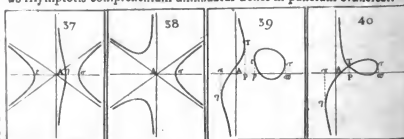
Ver.

Vertuntur etiam Species decima quarta ac decima sexta in *vigesimam octavam*, (Fig. 34.) decima quinta ac decima septima in *vigesimam nonam*, (Fig. 35.) decima octava & decima nona in *tricesimam*, (Fig. 36.) & vigesima cum vigesima prima in *tricesimam primam*, (Fig. 37.) Et hae species unicam habent Diametrum.



Ac denique species vigesima secunda & vigesima tertia vertuntur in Speciem *tricesimam secundam* cujus tres sunt Diametri per concursum Asymptoton transeuntes. (Fig. 38.)

Quae omnes conversiones facillime intelliguntur faciendo ut triangulum ab Asymptotis comprehensum diminuatur donec in punctum evanescat.



5. De Hyperbolis sex defectivis diametrum non habentibus.

Si in primo æquationum casu terminus ax^2 negativus est, Figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Asymptoton & duo tantum crura Hyperbolica juxta Asymptoton illam in plagas contrarias infinite progredientia. Et Asymptotos illa est Ordinata prima & principalis AG. Si terminus ey non deest figura nullam habebit Diametrum, si deest habebit unicam. In priori casu species sic enumerantur.

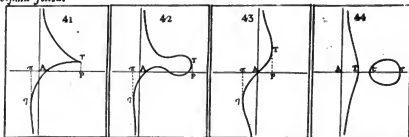
Si æquationis hujus $ax^2 = bx^2 + cx^2 + dx + \frac{1}{2}ee$ radices omnes $A\sigma$, AP , Ap , $A\sigma$, (Fig. 39.) sunt reales & inæquales, Figura erit Hyperbola Anginea asymptoton flexu contrario amplexa, cum Ovali conjugata. Quae Species est *tricesima tertia*.

Si

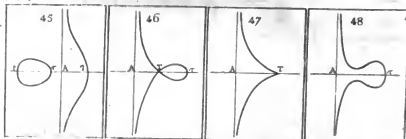
Si radices duæ mediæ AP & Ap (Fig. 40) æquantur inter se, Ovalis & Anguinea junguntur sese decussantes in forma *Nodi*. Quæ est *Species tricefima quarta*.

Si tres radices sunt æquales, Nodus vertetur in *Cuspidem* acutissimum in vertice Anguineæ, (Fig. 41) Et hæc est *Species tricefima quinta*.

Si e tribus radicibus ejusdem signi duæ maximæ Ap & $A\pi$ (Fig. 43) sibi mutuo æquantur, Ovalis in *Punctum* evanuit. Quæ *Species* est *tricefima sexta*.



Si radices duæ quævis imaginariæ sunt, sola manebit Anguinea *Pura* sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato. Si Anguinea illa non transit per punctum A (Fig. 42) *Species* est *tricefima septima*; sin transit per punctum illud A (id quod contingit ubi termini b ac d desunt,) punctum illud A erit centrum figuræ rectas omnes per ipsum ductas & ad Curvam utrinque terminatas bifecans, (Fig. 43.) Et hæc est *Species tricefima octava*.



6. De Hyperbolis septem defectivis diametrum habentibus.

In altero casu ubi terminus π deest & propterea figura Diametrum habet, si æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$ radices omnes AT , Ar , $A\pi$, (Fig. 44) sunt reales, inæquales & ejusdem signi, figura erit Hyperbola Conchoidalis cum Ovali ad convexitatem. Quæ est *Species tricefima nona*.

Si duæ radices sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi contrarii, *Ovalis* jacebit ad concavitatem Conchoidalis, (Fig. 45.) Estque *Species quadragesima*.

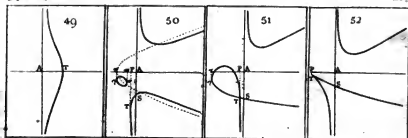
Si radices duæ minores AT, Ar, (Fig. 46) sunt æquales, & tertia Ar est ejusdem signi, *Ovalis* & Conchoidalis jungentur sese decussando in modum *Nodi*. Quæ *Species* est *quadragesima prima*.

Si tres radices sunt æquales, *Nodus* mutabitur in *Cuspidem*, & figura erit *Ciffus Veterum*, (Fig. 47.) Et hæc est *Species quadragesima secunda*.

Si radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem suam, (Fig. 49.) Estque *Species quadragesima tertia*.

Si radices duæ sunt æquales, & tertia est signi contrarii Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad concavitatem suam, (Fig. 49) Estque *Species quadragesima quarta*.

Si radices duæ sunt impossibiles habebitur Conchoidalis *Pura* sine Ovali, *Nodo*, *Cuspide* vel *Puncto* conjugato (Fig. 48. 49.) Quæ *Species* est *quadragesima quinta*.



7. De Hyperbolis septem Parabolicis Diametrum non habentibus.

Si quando in primo æquationum casu terminus ax^2 deest & terminus bx^2 non deest, Figura erit Hyperbola Parabolica duo habens crura Hyperbolica ad unam Asymptoton SAG & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si terminus cy non deest figura nullam habebit diametrum, sin deest habebit unicam. In priori casu Species sunt hæc.

Si tres radices AP, Ar, A π (Fig. 50.) æquationis hujus $bx^2 + cx^2 + dx + \frac{1}{2}ce = 0$ sunt inæquales & ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* & aliis duabus Curvis quæ partim Hyperbolicæ sunt & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cruribus Hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *Species quadragesima sexta*.

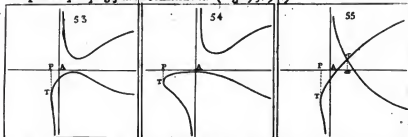
Si radices duæ minores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, *Ovalis* & una Curvarum illarum Hyperbolo-Parabolicarum junguntur & se decussant in formam *Nodi* (Fig. 51.) Quæ *Species* est *quadragesima septima*.

Si

Si tres radices sunt æquales, Nodus ille in Cuspidem vertitur (Fig. 52.) Estque Species quadragesima octava.

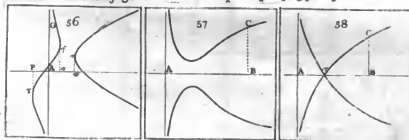
Si radices duæ majores sunt æquales & tertia est ejusdem signi, Ovalis in Punctum conjugatum evanuit (Fig. 53.) Quæ Species est quadragesima nona.

Si duæ radices sunt impossibiles, manebunt Pura illæ duæ curvæ Hyperbolo-parabolicæ sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato; & Speciem quinquagesimam constituent. (Fig. 53. 54.)



Si radices duæ sunt æquales & tertia est signi contrarii, Curvæ illæ Hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussando in morem crucis (Fig. 55.) Estque Species quinquagesima prima.

Si radices duæ sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi contrarii, figura evadet Hyperbola Anguinea circa Asymptoton AG, (Fig. 56) cum Parabola conjugata. Et hæc est Species quinquagesima secunda.



8. De Hyperbolis quatuor Parabolicis Diametrum habentibus.

In altero casu ubi terminus ey deest & figura Diametrum habet, si duæ radices æquationis hujus $bx^2 + cx + d = 0$ sunt impossibiles, duæ habentur figuræ Hyperbolo-parabolicæ a Diametro AB (Fig. 57.) hinc inde æqualiter distantes. Quæ Species est quinquagesima tertia.

Si æquationis illius radices duæ sunt impossibiles, Figuræ Hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussantes in morem crucis; & Speciem quinquagesimam quartam constituunt. Fig. 58.

Si

Si radices illæ sunt inæquales & ejusdem signi, habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabola ex eodem latere Asymptoti (Fig. 59.) Estque Species quinquagesima quinta.

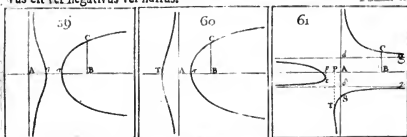
Si radices illæ sunt signi contrarii, habetur Conchoidalis cum Parabola ad alteras partes Asymptoti (Fig. 60.) Quæ Species est quinquagesima sexta.

9. De Quatuor Hyperbolis Hyperbolæ.

Si quando in primo æquationum casu terminus uterque ax^2 & bx^2 deest, figura erit Hyperbolismus sectionis alicujus Conicæ. Hyperbolismus figuræ voco cujus Ordinata prodit applicando contentum sub Ordinata figuræ illius & recta data ad Abscissam communem. Hac ratione linea recta vertitur in Hyperbolam Conicam, & sectio omnis Conica vertitur in aliquam figurarum quas hic Hyperbolismos sectionum Conicarum voco. Nam æquatio ad figuras de quibus agimus, nempe $xy^2 + cy = cx + d$, dat

$y = \frac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2x}$ quæ generatur applicando contentum sub Ordina-

nata sectionis Conicæ $\frac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2x}$ & recta data m , ad curvarum Abscissam communem x . Unde liquet quod figura genita Hyperbolismus erit Hyperbolæ, Ellipseos vel Parabolæ, perinde ut terminus cx affirmativus est vel negativus vel nullus.



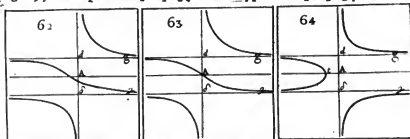
Hyperbolismus Hyperbolæ tres habet Asymptotos, quarum una est Ordinata prima & principalis Ad, alteræ duæ sunt parallelæ Abscissæ AB, ab eadem hinc inde æqualiter distant. In Ordinata principali Ad, cape Ad, A^h hinc inde æquales quantitati \sqrt{c} ; & per puncta d ac δ age dg, δy Asymptotos Abscissæ AB parallelas.

Ubi terminus cy non deest figura nullam habet diametrum. In hoc casu, si æquationis hujus $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ radices duæ AP, Ap (Fig. 61) sunt reales & inæquales (nam æquales esse nequeunt nisi figura sit Conica sectio) figura constabit ex tribus Hyperbolis sibi oppositis quarum una jacet inter

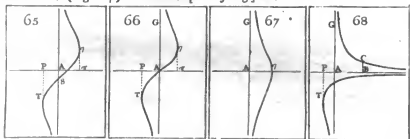
Asymp-

Asymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra. Et hæc est *Species quinquagesima septima*.

Si radices illæ duæ sunt impossibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppositæ extra Asymptotos parallelas & Anguinea Hyperbolica intra easdem. Hæc figura duarum est specierum. Nam centrum non habet ubi terminus d non deest (Fig. 62.) sed si terminus ille deest punctum A est ejus centrum (Fig. 63.) Prior *Species est quinquagesima octava*, posterior *quinquagesima nona*.



Quod si terminus cy deest, figura constabit ex tribus Hyperbolis oppositis, quarum una jacet inter Asymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra ut in specie quinquagesima quarta, & præterea diametrum habet quæ est Abscissa AB (Fig. 64.) Ex hæc est *Species sexagesima*.



10. De tribus Hyperbolismis Ellipseos.

Hyperbolismus Ellipseos per hanc æquationem definitur $xy^2 + cy = cx + d$, & unicam habet Asymptoton quæ est Ordinata principalis Ad (Fig. 65.) Si terminus cy non deest, figura est Hyperbola Anguinea sine diametro, atque etiam sine centro si terminus d non deest. Quæ *Species est sexagesima prima*.

At si terminus d deest, figura habet centrum sine diametro, & centrum ejus est punctum A (Fig. 66.) *Species vero est sexagesima secunda*.

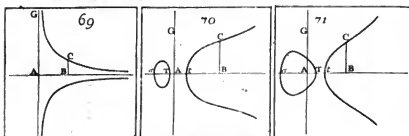
Et si terminus cy deest, & terminus d non deest, figura est Conchoidalis ad Asymptoton AG (Fig. 67,) habetque diametrum sine centro, & diameter ejus est Abscissa AB. Quæ *Species est sexagesima tertia*.

Y

11. De

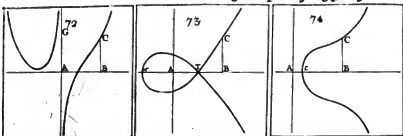
11. De duobus Hyperbolis Parabolæ.

Hyperbolismus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2 + ey = d$; & duas habet Asymptotos, Abscissam AB & Ordinatam primam & principalem AG. Hyperbolæ vero in hac figura sunt duæ, non in Asymptoton angulis oppositis sed in angulis qui sunt deinceps jacentes, idque ad utrumque latus abscissæ AB, & vel sine diametro si terminus ey habetur, (Fig. 68) vel cum diametro si terminus ille deest (Fig. 69.) Quæ duæ Species sunt sexagesima quarta & sexagesima quinta.



12. De Tridente.

In Secundo æquationum casu habebatur æquatio $xy = ax^2 + bx^2 + cx + d$. Et figura in hoc casu habet quatuor crura infinita quorum duo sunt Hyperbolica circa Asymptoton AG (Fig. 72) in contrarias partes tendentia & duo Parabolica convergentia & cum prioribus speciem Tridentis fere efformantia. Estque hæc Figura Parabola illa per quam Cartesius æquationes sex dimensionum construxit. Hæc est igitur Species sexagesima sexta.



13. De Parabolis quinque divergentibus.

In Tertio casu æquatio erat $y^2 = ax^2 + bx^2 + cx + d$, & Parabolam designat cujus crura divergunt ab invicem & in contrarias partes infinite progrediuntur. Abscissa AB est ejus diameter & Species ejus sunt quinque sequentes.

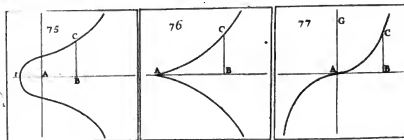
Si

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, radices omnes Ar , AT , At sunt reales & inæquales, figura est Parabola divergens. Campaniformis cum Ovali ad verticem (Fig. 70, 71.) Et Species est *sexagesima septima*.

Si radices duæ sunt æquales, Parabola prodit vel *Nodata* contingendo Ovalem (Fig. 73,) vel *Punctata* ob Ovalem infinite parvam (Fig. 74.) Quæ duæ Species sunt *sexagesima octava* & *sexagesima nona*.

Si tres radices sunt æquales Parabola erit *Cuspidata* in vertice (Fig. 76.) Et hæc est Parabola *Noiliana* quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et est Species *septuagesima*.

Si radices duæ sunt impossibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis. (Fig. 74, 75.) Speciem *septuagesimam primam* constituens.



14. De Parabola Cubica.

In Quarto casu æquatio erat $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & hæc æquatio. Parabolam designat quæ crura habet contraria & *Cubica* dici solet (Fig. 77.) Et sic Species omnino sunt *septuaginta dua*.

V. Genefis Curvarum per Umbras.

Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciantur, umbræ Sectionum Conicarum semper erunt Sectiones Conicæ, eæ Curvarum secundi Generis semper erunt Curvæ secundi Generis, eæ Curvarum tertii Generis semper erunt Curvæ tertii Generis, & sic deinceps in infinitum.

Et quemadmodum Circulus umbram projiciendo generat Sectiones omnes Conicas, sic Parabolæ quinque divergentes umbris suis generant & exhibent alias omnes secundi Generis Curvas; & sic Curvæ quædam simpliciores aliorum Generum inveniri possunt quæ alias omnes eorundem Generum Curvas umbris suis a puncto lucido in planum projectis formabunt.

De.

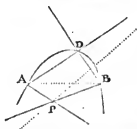
De Curvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas secundi Generis a Linea recta in punctis tribus secari posse. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut cum Recta per Ovalem infinite parvam transit vel per concursum duarum partium Curvæ se mutuo secantium vel in cuspidem coeuntium ducitur. Et si quando Rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantum puncto secant, (ut fit in ordinatis Parabolæ *Cartesiana* & Parabolæ cubicæ, nec non in rectis Abscissæ Hyperbolicorum Hyperbolæ & Parabolæ parallelis) concipiendum est quod Rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam distantiam sua (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem quæ habent Punctum Duplex describi possunt per sequentia Theoremata.

VI. De Curvarum descriptione Organica.

T H E O R. I.

Si Anguli duo magnitudine dati PAD, PBD circa polos positione datos



A, B rotentur, & eorum crura AP, BP concursu suo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD, BD concursu suo D describent Sectionem Conicam per polos A, B transeuntem: præterquam ubi Linea illa recta transit per polorum alterutrum A vel B,

vel anguli BAD, ABD simul evanescunt, quibus in casibus punctum D describet Lineam rectam.

T H E O R. II.

Si crura prima AP, BP concursu suo P percurrant Sectionem Conicam per polum alterutrum A transeuntem, crura duo reliqua AD, BD concursu

fu suo D describent Curvam secundi Generis per polum alterum B transeuntem & Punctum duplex habentem in polo primo A, per quem sectio Conica tranfit: præterquam ubi anguli BAD, ABD simul evanescunt, quo casu punctum D describet aliam sectionem Conicam per polum A transeuntem.



THEOR. III.

At si sectio Conica quam punctum P percurrit transeat per neutrum polorum A, B, punctum D describet Curvam secundi vel tertii generis Punctum duplex habentem. Et Punctum illud duplex in concursu crurum describentium, AD, BD invenietur ubi anguli BAP, ABP simul evanescunt. Curva autem descripta secundi erit Generis si anguli BAD, ABD simul evanescunt, alias erit tertii Generis & alia duo habebit Puncta duplicia in polis A & B.

*Sectionum Conicarum descriptio per data quinque puncta.*

Jam sectio Conica determinatur ex datis ejus punctis quinque & per eadem sic describi potest. Dentur ejus puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & trianguli ABC rotentur anguli duo quivis CAB, CBA circa vertexes suos A & B, & ubi crurum AC, BC intersectio C successive applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat intersectio crurum reliquorum AB & BA in puncta P & Q. Agatur & infinite producat recta PQ, & anguli mobiles ita rotentur ut intersectio crurum AB, BA percurrat rectam PQ, & crurum reliquorum intersectio C describet propositam sectionem Conicam per *Theorema primum*.



VII. Constructio æquationum per descriptionem Curvarum.

Curvarum usus in Geometria est ut per earum intersectiones Problemata solvantur. Proponatur æquatio construenda dimensionum novem

$$x^9 + bx^8 + cx^7 + dx^6 + ex^5 + fx^4 + gx^3 + bx + k = 0.$$

Ubi b, c, d , &c. significant quantitates quasvis datas signis suis $+$ & $-$ affectas. Assumatur æquatio ad Parabolam cubicam $x^3 = y$, & æquatio prior, scribendo y pro x^3 , evadet

$y^3 + by^2 + cy^2 + dx^2y + exy + my + fx^3 + gx^3 + bx + k = 0$,
æquatio ad Curvam aliam secundi Generis. Ubi m vel f deesse potest vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones & intersectiones dabuntur radices æquationis construendæ. Parabolam cubicam semel describere sufficit.

Si æquatio construenda per defectum duorum terminorum ultimarum bx & k reducatur ad septem dimensiones, Curva altera delendo m , habebit Punctum Duplex in principio Abscissæ, & inde facile describi potest ut supra.

Si æquatio construenda per defectum terminorum trium ultimarum $gx^3 + bx + k$ reducatur ad sex dimensiones, Curva altera delendo f evadet sectio Conica.

Et si per defectum sex ultimarum terminorum æquatio construenda reducatur ad tres dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianam* per Parabolam cubicam & Lineam rectam.

Construi etiam possunt æquationes per Hyperbolicismum Parabolæ cum diametro. Ut si construenda sit hæc æquatio dimensionum novem termino penultimo carens,

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + bx^7 + kx^8 + lx^9 = 0,$$

Assumatur æquatio ad Hyperbolicismum illum $x^2y = 1$, & scribendo y pro $\frac{1}{x^2}$, æquatio construenda vertetur in hanc

$ay^3 + cy^3 + dy^2 + ey + fxy + mx^2y + g + bx + kx^2 + lx^3 = 0$,
quæ curvam secundi Generis designat cujus descriptione Problema solvetur. Et quantitarum m ac g alterutra hic deesse potest, vel pro lubitu assumi.

Pec

Per Parabolam cubicam & Curvas tertii Generis construuntur etiam æquationes omnes dimensionum non plusquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti Generis construuntur omnes dimensionum non plusquam quindecim; Et sic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti & superiorum Generum describi semper possunt inveniendò eorum puncta per Geometriam planam. Ut si construenda sit æquatio $x^{12} * + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + kx + l = 0$, & descripta habeatur Parabola Cubica, sit æquatio ad Parabolam illam Cubicam $x^3 = y$, & scribendo y pro x^3 , æquatio construenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{ccccccc} y^4 + axy^3 + cx^2y^2 + fx^3y + ix^4 = 0, \\ + b & + dx & + gx & + kx \\ + e & + b & + l \end{array}$$

quæ est æquatio ad Curvam tertii Generis cujus descriptione Problema solvetur. Describi autem potest hæc Curva inveniendò ejus puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata quantitas x non nisi ad duas dimensiones ascendit.





T A B

CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUL

Sit jam aGD vel PGD vel GDS Sectio Conica cujus Area ad Quæ Semiaxis conjugatus AP, datum Abscissa principium A vel a vel aBDG vel zBDG = x , existente aG Ordinata ad punctum z . Junga parallelogrammum ABDO. Et si quando ad quadraturam Curvæ propositæ Ordinata r , et Area σ . Sit autem + differentia duarum quantitatum ubi Et in Forma sexta scribatur p pro $\sqrt{ff - 4eg}$.

CURVARUM FORMÆ		SECTIONIS CONICÆ	
		Abscissa	Ordinata
I	1 $\frac{dx^{n-1}}{c + \sqrt{x}} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{c + \sqrt{x}} = v$
	2 $\frac{dx^{n-1}}{c + \sqrt{x}} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{c + \sqrt{x}} = v$
	3 $\frac{dx^{n-1}}{c + \sqrt{x}} = y$	$z^n = x$	$\frac{d}{c + \sqrt{x}} = v$
II	1 $\frac{dx^{n-1}}{c + \sqrt{x}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{c + \sqrt{x}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{f}{c}x^2} = v$
	2 $\frac{dx^{n-1}}{c + \sqrt{x}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{c + \sqrt{x}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{f}{c}x^2} = v$
	3 $\frac{dx^{n-1}}{c + \sqrt{x}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{c + \sqrt{x}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{f}{c}x^2} = v$
III	1 $\frac{d}{x}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x^2$	$\sqrt{f + cx^2} = v$
	vel sic	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$
	2 $\frac{d}{x^2}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x^2$	$\sqrt{f + cx^2} = v$
	vel sic	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$
	3 $\frac{d}{x^3}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$
	4 $\frac{d}{x^4}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$
IV	1 $\frac{d}{x}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x^2$	$\sqrt{f + cx^2} = v$
	vel sic	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$
	2 $\frac{d}{x^2}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x^2$	$\sqrt{f + cx^2} = v$
	vel sic	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$
	3 $\frac{d}{x^3}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$
	4 $\frac{d}{x^4}\sqrt{c + \sqrt{x}} = y$	$\frac{1}{x^2} = x$	$\sqrt{fx + cx^2} = v$





RESIDUUM TABULÆ CURVARUM SIMPLICIORUM

CURVARUM FORMÆ		SECTIONIS CONICÆ	
		Abscissa	Ordinata
V	1 $\frac{dx^{2n-1}}{c + fz^n + gz^{2n}} = y$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{f^2 - 4cg}{4g^2} x^2} = v$
	vel sic	$\sqrt{\frac{dx^{2n}}{c + fz^n + gz^{2n}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{c} + \frac{f^2 - 4cg}{4c^2} x^2} = v$
VI	2 $\frac{dx^{2n-1}}{c + fz^n + gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{c} + \frac{f^2 - 4cg}{4c^2} x^2} = x$	$\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{f^2 - 4cg}{4g^2} x^2} = v$
		$\sqrt{fz^n + gz^{2n}} = x$	$\frac{c}{c + g} = x$
VII	1 $\frac{dx^{2n-1}}{c + fz^n + gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{f} + \frac{f^2 - 4cg}{4f^2} x^2} = x$	$\sqrt{d + \frac{f^2 - 4cg}{4f} x^2} = v$
		$\sqrt{\frac{d}{f} + \frac{f^2 - 4cg}{4f^2} x^2} = x$	$\sqrt{d + \frac{f^2 - 4cg}{4f} x^2} = v$
VIII	2 $\frac{dx^{2n-1}}{c + fz^n + gz^{2n}} = y$	$\sqrt{\frac{d}{f} + \frac{f^2 - 4cg}{4f^2} x^2} = x$	$\sqrt{d + \frac{f^2 - 4cg}{4f} x^2} = v$
		$\sqrt{\frac{d}{f} + \frac{f^2 - 4cg}{4f^2} x^2} = x$	$\sqrt{d + \frac{f^2 - 4cg}{4f} x^2} = v$
IX	1 $\frac{dx^{2n-1}}{c + fz^n + gz^{2n}} = y$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = x$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = v$
		$\frac{c}{c + g} = x$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = v$
X	2 $\frac{dx^{2n-1}}{c + fz^n + gz^{2n}} = y$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = x$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = v$
		$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = x$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = v$
XI	1 $\frac{dx^{2n-1}}{c + fz^n + gz^{2n}} = y$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = x$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = v$
		$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = x$	$\sqrt{c + fz^n + gz^{2n}} = v$

UM QUE CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT

CURVARUM AREA

$$\frac{xv - 2f}{\eta} = t.$$

$$\frac{2f - xv}{\eta} = t.$$

$$\frac{d\sigma + 2f\sigma - f\sigma v}{2\eta g} = t.$$

$$\frac{2xv - 4f - 2\lambda x + 4\sigma}{\eta p} = t.$$

$$\frac{4f - 2xv - 4\sigma + 2\lambda x}{\eta p} = t.$$

$$\frac{4dc^2\lambda x + 2defx - 4dfgxv + 4d\sigma g v - 8de^4\sigma + 4dfg\sigma}{4\eta c g - \eta f} = t.$$

$$\frac{d}{\eta} s = t = \frac{d}{\eta} \times \alpha GDB. \text{ Fig. 1. 3. 4.}$$

$$\frac{d}{3\eta g} v^2 - \frac{df}{2\eta g} s = t.$$

$$\frac{6dgx - 5df}{16\eta g^2} v^2 + \frac{2df^2 - 4deg}{16\eta g^2} s = t.$$

$$\frac{8dgx - 4degxv - 2d\sigma v}{4\eta c g - \eta f^2} = t = \frac{8dg}{4\eta c g - \eta f^2} \times \alpha GDB \pm \Delta DBA. \text{ Fig. 2. 4.}$$

$$-\frac{4dfx + 2dfxv + 4dev}{4\eta c g - \eta f^2} = t.$$

$$\frac{1d\sigma^2}{-4deg} s - \frac{1d\sigma^2}{4\eta c g - \eta f^2} xv - 2defv = t.$$

$$\frac{16degx - 4degxv + 10d\sigma^2}{16\eta g^2 - 8\eta c g} xv + \frac{10d\sigma^2}{16\eta g^2 - 8\eta c g} xv - \frac{10de^4}{16\eta g^2 - 8\eta c g} v = t.$$

$$\frac{4\sigma g h}{-4\eta h} s + \frac{2\sigma g h}{\eta h} xv + 2df \frac{v}{h} = t.$$

$$\frac{4\sigma g h}{-4\eta g} s - \frac{2\sigma g h}{1\eta g} xv + 2 \frac{dh}{\eta h} \frac{v^2}{x} - 2df \frac{v}{h} = t.$$

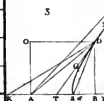
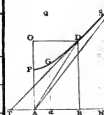
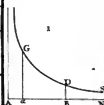
$$\frac{2xv - 4f}{\eta f} = t = \frac{4}{\eta f} \text{ ADGa. Fig. 3. 4.}$$

$$\frac{4\sigma x - 2\sigma xv + 2d\sigma}{\eta h} = t.$$

$$\frac{2xv^2 - 2 - 4df - 4dev}{\eta g - cch} = t.$$

$$\frac{2d}{\eta h} s = t.$$

$$\frac{d\sigma v^2 - 2dfg s}{2\eta f h^2} = t.$$



Ioher...Senex sculpit





METHODUS DIFFERENTIALIS.

PROP. I.



I figuræ curvilinæ Abscissa componatur ex quantitate quavis data A, & quantitate indeterminata x, & Ordinata constet ex datis quocunque quantitibus b, c, d, e, &c. in totidem terminos hujus progressionis

Geometricæ x , x^2 , x^3 , x^4 , &c. respectivè ductis, & ad Abscissæ puncta totidem data erigantur Ordinatum applicatæ: dico quod Ordinarum differentia primæ dividi possint per earum intervalla, & differentiarum sic divi-

A a

sarum

*sarum differentia dividi possint per Ordinarum bina-
rum intervalla, & harum differentiarum sic divisarum
differentia dividi possint per Ordinarum ternarum in-
tervalla, & sic deinceps in infinitum.*

Etenim si pro Abscissæ parte indeterminata x ponantur quantitates
quævis datæ p, q, r, s, t , &c. successive, & ad Abscissarum sic datarum
terminos erigantur Ordinatæ $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c. Hæ Abscissæ & Ordina-
tæ & Ordinarum differentia divisæ per Abscissarum differentias (quæ
utique sunt Ordinarum intervalla) & quototum differentia divisæ per
Ordinarum alternarum differentias, & sic deinceps, exhibentur per
Tabulam sequentem.

Abscissæ	Ordinatæ
$A + p$	$A + bp + cp^2 + dp^3 + ep^4 = a$
$A + q$	$A + bq + cq^2 + dq^3 + eq^4 = \beta$
$A + r$	$A + br + cr^2 + dr^3 + er^4 = \gamma$
$A + s$	$A + bs + cs^2 + ds^3 + es^4 = \delta$
$A + t$	$A + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 = \epsilon$
Divisor. Diff. Ord.	Quoti per divisionem prodeuntes.
$p - q) a - \beta$	$b + c \times \overline{p + q} + d \times \overline{pp + pq + qq} + e \times \overline{p^3 + p^2q + pq^2 + q^3} = \zeta$
$q - r) \beta - \gamma$	$b + c \times \overline{q + r} + d \times \overline{qq + qr + rr} + e \times \overline{q^3 + q^2r + qr^2 + r^3} = \eta$
$r - s) \gamma - \delta$	$b + c \times \overline{r + s} + d \times \overline{rr + rs + ss} + e \times \overline{r^3 + r^2s + rs^2 + s^3} = \theta$
$s - t) \delta - \epsilon$	$b + c \times \overline{s + t} + d \times \overline{ss + st + tt} + e \times \overline{s^3 + s^2t + st^2 + t^3} = \kappa$
$p - r) a - \gamma$	$c + d \times \overline{p + q + r} + e \times \overline{pp + pq + qq + pr + qr + rr} = \lambda$
$q - s) \beta - \delta$	$c + d \times \overline{q + r + s} + e \times \overline{qq + qr + rr + qs + rs + ss} = \mu$
$r - t) \gamma - \epsilon$	$c + d \times \overline{r + s + t} + e \times \overline{rr + rs + ss + rt + st + tt} = \nu$
$p - s) a - \delta$	$d + e \times \overline{p + q + r + s} = \xi$
$q - t) \beta - \epsilon$	$d + e \times \overline{q + r + s + t} = \pi$
$p - t) a - \epsilon$	$e = \sigma$

PROP.

P R O P. II.

Iisdem positis, & quod numerus terminorum b, c, d, e, &c. sit finitus, dico quod Quotorum ultimus æqualis erit ultimo terminorum b, c, d, e, &c. et quod per Quotos reliquos dabuntur termini reliqui b, c, d, e, &c. et his datis dabitur Linea Curva generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium terminos transibit.

Etenim in Tabula superiore Quotus ultimus e æqualis erat termino ultimo e . Et hic terminus ductus in summam datam $p+q+r+s$, & ablatas de Quoto ξ relinquit terminum penultimum d . Et quantitates jam datæ $d \times p + q + r + e \times pp + pq + qq + pr + qr + rr$, si auferantur de Quoto λ , relinquant terminorum antepenultimum c . Et quantitates jam datæ $c \times p + q + d \times pp + pq + qq + e \times p^3 + ppq + pqq + q^3$, si auferantur de Quoto ζ , relinquant terminum b . Et simili computo si plures essent termini, colligerentur omnes per Quotorum Ordines totidem. Deinde quantitates datæ $bp + cpp + dp^3 + ep^4$, si subducantur de Ordinata prima a , relinquant Abscissæ terminum primum A . Et quantitas $A + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$ est Ordinata Curvæ generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium datarum terminos transibit, existente Abscissâ $A + x$.

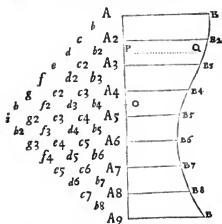
Ex his Propositionibus quæ sequuntur facile colligi possunt.

P R O P. III.

Si Recta aliqua AA9 in æquales quotcunque partes AA2, A2A3, A3A4, A4A5, &c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ AB, A2B2, A3B3, &c. Invenire curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos B, B2, B3, &c. transibit.

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære differentias Primas, b, b_2, b_3 , &c. Secundas c, c_2, c_3 , &c. Tercias d, d_2, d_3 , &c. et sic deinceps usque dum veneris ad ultimam differentiam, quæ hic fit i .

Tunc



quod erit vel medius terminorum A, A2, A3, &c. vel Arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit ubi numerus terminorum A, A2, A3, &c. est impar; posterius ubi par.

Tunc incipiendo ab ultima differentia excerpere medias differentias in alternis Columnis vel Ordinibus differentiarum, & Arithmetica media inter duas medias reliquarum, Ordine pergendo usque ad Seriem primorum terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. sint hæc $k, l, m, n, o, p, q, r, s$, &c. quorum ultimus significat ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum differentiarum, &c. sic deinceps usque ad primum

C A S. I.

In Casu priori, fit A_5B_5 iste medius terminus, hoc est, $A_5B_5 = k$, $\frac{b_3 + b_5}{2} = l$, $c_4 = m$, $\frac{d_3 + d_5}{2} = n$, $e_3 = o$, $\frac{f_2 + f_4}{2} = p$, $g_2 = q$, $\frac{h + h_2}{2} = r$, $i = s$. Et erecta Ordinatum applicata PQ, dic $A_5P = x$; & duc terminos hujus Progressionis

$1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x^2-1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{x^2-4}{5x} \times \frac{x}{6} \times \frac{x^2-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{x^2-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{x^2-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{x^2-36}{13x} \&c.$
in se continuo; & orientur termini

$1. x. \frac{x^3}{2} \cdot \frac{x^3-x}{6} \cdot \frac{x^4-x^2}{24} \cdot \frac{x^5-5x^3+4x}{120} \cdot \frac{x^6-5x^4+4x^2}{720} \cdot \frac{x^7-14x^5+140x^3-36x}{5040} \&c.$

per quos si termini seriei k, l, m, n, o, p , &c. respective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{x^2}{2}m + \frac{x^3-x}{6}n + \frac{x^4-x^2}{24}o + \frac{x^5-5x^3+4x}{120}p + \&c.$ erit longitudo Ordinatum applicatæ PQ.

C A S. II.

In Casu posteriori, sint A_4B_4 , A_5B_5 duo medii termini, hoc est, sit $\frac{A_4B_4 + A_5B_5}{2} = k$, $b_4 = l$, $\frac{c_3 + c_4}{2} = m$, $d_3 = n$, $e_2 + e_3 = o$, $f_2 = p$, $\frac{g + g_2}{2} = q$, &c. $h = r$.

&c. $b = r$. Et erecta Ordinatum applicata PQ, bifeca A_4A_5 in O, & dicto $OP = x$, duc Terminos hujus Progreſſionis

$1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx - \frac{1}{2}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx - \frac{3}{2}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx - \frac{5}{2}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx - \frac{7}{2}}{8x}$, &c. in ſe continuo; et orientur termini 1. x , $\frac{4x^2 - 1}{8}$, $\frac{4x^2 - x}{24}$, $\frac{16x^4 - 40x^2 + 9}{384}$, &c. per quos ſi termini ſeries k, l, m, n, o, p, q , &c. reſpective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{4x^2 - 1}{8}m + \frac{4x^2 - x}{24}n + \frac{16x^4 - 40x^2 + 9}{384}o + \&c.$ erit Longitudo Ordinatum applicatæ PQ.

Sed hic notandum eſt quod intervalla AA_2, A_2A_3, A_3A_4 , &c. hic ſupponantur eſſe unitates, & quod differentiæ colligi debent auferendo inferiores quantitates de ſuperioribus, A_2B_2 de AB , A_3B_3 de A_2B_2 , b_2 de b , &c. et faciendi ut ſint $AB - A_2B_2 = b$, $A_2B_2 - A_3B_3 = b_2$, $b - b_2 = c$, &c. adeoque quando differentiæ illæ hoc modo prodeunt negativæ ſigna earum mutanda ſunt.

P R O P. IV.

Si reſta aliqua in partes quotcunque inæquales $AA_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$, &c. dividatur, & ad puncta diſiſionum erigantur parallele AB, A_2B_2, A_3B_3 , &c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos B, B_2, B_3 , &c. tranſibit.

Sunto puncta data $B, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$, &c. et ad Abſciſſam quamvis AA_7 demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B_2A_2 , &c.

Et fac $\frac{AB - A_2B_2}{AA_2} = b$, $\frac{A_2B_2 - A_3B_3}{A_2A_3} = b_2$,

$$\frac{A_2B_3 - A_3B_4}{A_3A_4} = b_3, \frac{A_3B_4 - A_4B_5}{A_4A_5} = b_4,$$

$$\frac{A_4B_5 - A_5B_6}{A_5A_6} = b_5, \frac{A_5B_6 - A_6B_7}{A_6A_7} = b_6,$$

$$\frac{A_6B_7 - A_7B_8}{A_7A_8} = b_7.$$

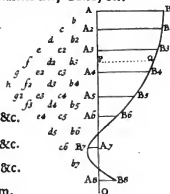
$$\text{Deinde } \frac{b - b_2}{AA_3} = c, \frac{b_2 - b_3}{A_2A_4} = c_2, \frac{b_3 - b_4}{A_3A_5} = c_3, \&c.$$

$$\text{Tunc } \frac{c - c_2}{AA_4} = d, \frac{c_2 - c_3}{A_2A_5} = d_2, \frac{c_3 - c_4}{A_3A_6} = d_3, \&c.$$

$$\text{Et } \frac{d - d_2}{AA_5} = e, \frac{d_2 - d_3}{A_2A_6} = e_2, \frac{d_3 - d_4}{A_3A_7} = e_3, \&c.$$

ſic pergendum eſt ad ultimam differentiam.

B b



Differen-

Differentiis fit collectis & divisis per intervalla Ordinatum applicatarum; in alternis earum Columnis five Seriebus vel Ordinibus excerpe medias, incipiendo ab ultima, & in reliquis Columnis excerpe media Arithmetica inter duas medias, pergendo usque ad seriem primorum terminorum, AB, A₂B₂, &c. Sunt hæc k, l, m, n, o, p, q, r , &c. quorum ultimus terminus significet ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus k erit media Ordinatum applicata, si numerus datorum punctorum est impar; vel medium Arithmeticum inter duas medias, si numerus eorum est par.

C A S. I.

In Casu priori, fit A₄B₄ ista media Ordinatum applicata, hoc est, fit A₄B₄ = k , $\frac{b_3 + b_4}{2} = l$, $c_3 = m$, $\frac{d_2 + d_3}{2} = n$, $e_2 = o$, $\frac{f_1 + f_2}{2} = p$, $g = q$. Et erecta Ordinatum applicata PQ, & in Basi AA₅ sumpto quovis puncto O, dic OP = x , & duc in se gradatim terminos hujus Progressionis

$$1 \times x - \overline{OA_4} \times x - \frac{\overline{OA_3 + OA_5}}{2} \times \frac{x - \overline{OA_3} \times x - \overline{OA_5}}{x - \frac{1}{2}\overline{OA_3 + OA_5}} \times x - \frac{\overline{OA_2 + OA_6}}{2} \times \&c.$$

et orram Progressionem asserva; vel quod perinde est duc terminos hujus Progressionis

$$1 \times \overline{x - OA_4} \times \overline{x - OA_3} \times \overline{x - OA_5} \times \overline{x - OA_2} \times \overline{x - OA_6} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA_7} \times \&c.$$

in se gradatim, & terminos exinde ortos duc respective in terminos hujus Progressionis

$$1. x - \frac{\overline{OA_3 + OA_5}}{2}, x - \frac{\overline{OA_2 + OA_6}}{2}, x - \frac{\overline{OA + OA_7}}{2}, \&c. \text{ et orientur termini intermedii tota Progressione existente}$$

$$1. x - \overline{OA_4}. x^2 - \frac{\overline{OA_3 + 2OA_5 + OA_5}}{2} x + \frac{\overline{OA_3 + OA_5}}{2} \times \overline{OA_4}, \&c.$$

Vel dic OA = α , OA₂ = β , OA₃ = γ , OA₄ = δ , OA₅ = ϵ , OA₆ = ζ , OA₇ = η : $\frac{\overline{OA_3 + OA_5}}{2} = \theta$, $\frac{\overline{OA_2 + OA_6}}{2} = \chi$, $\frac{\overline{OA + OA_7}}{2} = \lambda$. Et ex Progressione

$1 \times \overline{x - \delta} \times \overline{x - \gamma} \times \overline{x - \epsilon} \times \overline{x - \beta} \times \overline{x - \zeta} \times \overline{x - \alpha} \times \overline{x - \eta}$ &c. collige terminos quibus multiplicatis per $1. x - \theta$, $x - \chi$, $x - \lambda$, &c collige alios terminos intermedios, tota serie prodeunte

$1. x - \delta, x^2 - \delta + \theta x + \delta\theta, x^3 - \delta + 2\theta x + \gamma\epsilon + 2\delta\theta x - \gamma\delta\epsilon$, &c.
per cujus terminos multiplica series k, l, m, n, o , &c. Et aggregatum productorum $k + \overline{x - \delta} \times l + x^2 - \delta + \theta x + \delta\theta \times m + \&c.$ erit longitudo Ordinatum applicata PQ.

C A S.

C A S. II.

In Casu posteriori, sint A_4B_4, A_5B_5 duæ mediæ Ordinatim applicatæ, hoc est, $\frac{A_4B_4 + A_5B_5}{2} = k, b_4 = l, \frac{c_3 + c_4}{2} = m, d_3 = n, \frac{e_2 + e_3}{2} = o, f_2 = p, \&c.$ Et alternorum $k, m, o, q, \&c.$ Coefficientes orientur ex multiplicatione terminorum hujus Progressionis in se

$1 \times x - OA_4 \times x - OA_5 \times x - OA_3 \times x - OA_6 \times x - OA_2 \times x - OA_7 \times x - OA \times x - OA_8 \&c.$
Et reliquorum Coefficientes ex multiplicatione horum per terminos hujus Progressionis

$$x - \frac{OA_4 + OA_5}{2}, x - \frac{OA_3 + OA_6}{2}, x - \frac{OA_2 + OA_7}{2}, x - \frac{OA + OA_8}{2}, \&c.$$

Hoc est, erit $k + x - \frac{OA_4 + OA_5}{2} \times l + x - OA_4 + OA_5 \times x + OA_4 \times OA_5 \times m, \&c.$ Ordinatim applicata PQ,

$$\text{vel } PQ = k + \frac{x}{\frac{1}{2}OA_4} \times l + \frac{x}{-OA_4} \times \frac{x}{-OA_5} + \frac{x}{-OA_4} \times \frac{x}{-OA_5} \times m + \frac{x}{-OA_4} \times \frac{x}{-OA_5} \times \frac{x}{-\frac{1}{2}OA_3} + \frac{x}{-\frac{1}{2}OA_6} \times n \&c.$$

$$\text{Sive dic } x - \frac{OA_4 + OA_5}{2} = \pi, \quad x - OA_4 \times x - OA_5 = \tau,$$

$$\pi \times x - \frac{OA_3 + OA_6}{2} = \sigma, \quad \pi \times x - OA_3 \times x - OA_6 = \nu,$$

$$\tau \times x - \frac{OA_2 + OA_7}{2} = \upsilon, \quad \tau \times x - OA_2 \times x - OA_7 = \phi,$$

$$\phi \times x - \frac{OA + OA_8}{2} = \chi, \quad \phi \times x - OA \times x - OA_8 = \psi,$$

$$\text{Et erit } k + \pi l + \sigma m + \tau o + \upsilon p + \phi q + \chi r + \psi s = PQ.$$

P R O P. V.

Datis aliquot terminis seriei cujusunque ad data intervalla dispositis, invenire terminum quemvis intermediuum quamproxime.

Ad rectam positione datam erigantur termini dati in dato angulo, interpositis datis intervallis, & per eorum puncta extrema, per Propositiones præcedentes, ducatur linea Curva generis Parabolici. Hac enim continget terminos omnes intermedios per seriem totam.

PROP.

P R O P. VI.

Figuram quamcunque Curvilineam quadrare quamproxime, cujus Ordinata aliquot inveniri possunt.

Per terminos Ordinatarum ducatur linea Curva generis Parabolici ope Propositionum præcedentium. Hæc enim figuram terminabit quæ semper quadrari potest, et cujus Area æquabitur Area figuræ propositæ quamproxime.

S C H O L I U M.

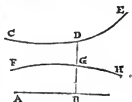
Utiles sunt hæ Propositiones ad Tabulas construendas per interpolationem Serierum, ut & ad solutiones Problematum quæ a quadraturis Curvarum dependent, præsertim si Ordinatarum intervalla & parva sint & æqualia inter se, & Regulæ computentur, & in usum referentur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut si quatuor sint Ordinata ad æqualia intervalla sitæ, sit A summa primæ & quartæ, B summa secundæ & tertiæ, & R intervallum inter primam & quartam, & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{B-A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A+B}{8} R$.

Et nota quod ubi Ordinata stant ad æquales ab invicem distantias, summando summas Ordinatarum quæ ab Ordinata media hinc inde æqualiter distant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova cujus Area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis est Area Curvæ prioris quam invenire oportuit. Quinetiam si pro Ordinatis novis sumantur summa Ordinatæ primæ & secundæ, et summa tertiæ & quartæ, et summa quintæ & sextæ, & sic deinceps; vel si sumantur summa trium primarum Ordinatarum, & summa trium proximarum, & summa trium quæ sunt deinceps; vel si sumantur summa quaternarum Ordinatarum, vel summa quinarum: Area Curvæ novæ æqualis erit Area Curvæ primo propositæ. Et sic habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quocunque quadratura ejus ad quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per

Per data vero puncta quotcunque non solum Curvæ lineæ generis *Parabolici*, sed etiam Curvæ alix innumeræ diversorum generum duci possunt.

Sunto CDE, FGH Curvæ duæ Abscissam habentes communem AB, et Ordinatas in eadem recta jacentes BD, BG, & relatio inter has Ordinatas definiatur per æquationem quamcunque. Dentur puncta quotcunque per quæ Curva CDE transire debet, & per æquationem illam dabuntur puncta totidem nova per quæ Curva FGH transibit. Per Propositiones superiores describatur Curva FGH generis *Parabolici* quæ per puncta illa omnia nova transeat, & per æquationem eandem dabitur Curva CDE quæ per puncta omnia primo data transibit.



F I N I S.



616276





